

Лекция 5. Работа и энергия



- Замечания:

1) “замкнутые”/ “изолированные” ... ?

2) ИСО !!

3) Если $\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^{\text{внешн.}})_x = 0$, то $(\vec{P})_x^{\text{“до”}} = (\vec{P})_x^{\text{“после”}}$

4) $\vec{f}_{ij}^{\text{внутр.}}$ - любые !

5.2. Реактивное движение. Уравнение Мещерского

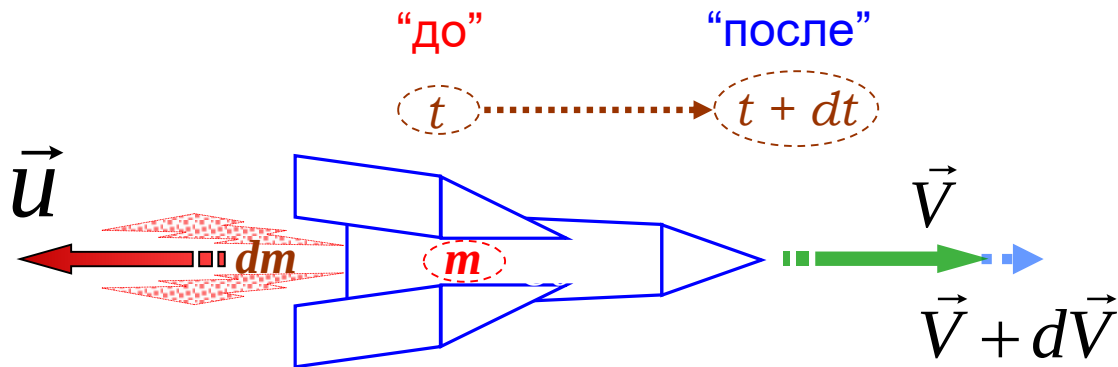


Рис. 5.1

Доска 6

$$\vec{p}^{\text{до}} = \vec{p}^{\text{после}}; \quad \underline{\underline{dm > 0}}$$

ИСО; $m\vec{V} = (m-dm) \cdot (\vec{V} + d\vec{V}) + dm \cdot (\vec{V} + \vec{u})$

$$\cancel{m\vec{V}} = \cancel{m\vec{V}} + m d\vec{V} - \cancel{dm \cdot \vec{V}} - \underbrace{dm \cdot d\vec{V}}_{\rightarrow 0} + \cancel{dm \cdot \vec{V}} + dm \cdot \vec{u}$$

$$m d\vec{V} = - dm \cdot \vec{u} \quad \Bigg| : dt$$

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = - \underbrace{\left(\frac{dm}{dt} \right)}_{=\mu} \cdot \vec{u}$$

$$\mu = \frac{dm}{dt};$$

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = - \mu \cdot \vec{u}$$

реакт. сила

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = -\mu \cdot \vec{u}$$

$\vec{u}$ – скорость выброса продуктов сгорания топлива

$$\frac{dm}{dt} \equiv \mu \quad \dots ? \quad (\text{темп расхода топлива})$$

$$\vec{F}_{\text{реакт}} = -\mu \cdot \vec{u} \quad \text{“реактивная сила”}$$

5.3. Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{N}_i^{\text{внешн.}} \quad (\text{“уравнение моментов”})$$

♣ **Если** сумма моментов всех внешних сил, действующих на тела системы равна нулю, то момент импульса системы не меняется с течением времени (т.е. сохраняется)

$$\text{Если } \sum_{i=1}^n \vec{N}_i^{\text{внешн.}} = 0, \text{ то } \vec{M} = \text{const}$$

Аналогично и для проекций :



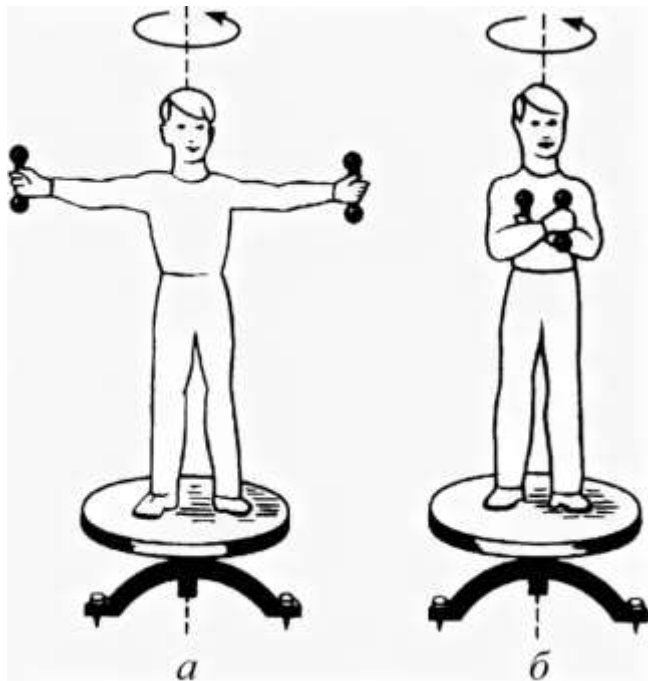


$$\sum_{i=1}^n (\vec{N}_i^{\text{внешн.}})_z = 0 \Rightarrow (\vec{M})_z^{\text{"до"}} = (\vec{M})_z^{\text{"после"}}$$

Пример 5.1. *“Скамья Жуковского”*
(демонстрация)

Пример 5.2. *“Маятник Пешехонова”*
(демонстрация)

$$(I_z \omega)^{\text{"до"}} = (I_z \omega)^{\text{"после"}}$$

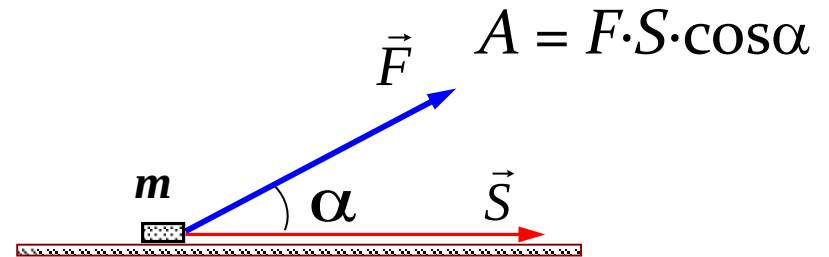


Сохранение момента
импульса –
Скамья Жуковского

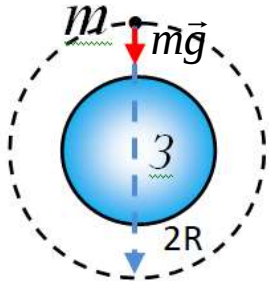


5.4. Работа силы

“Опр.”???

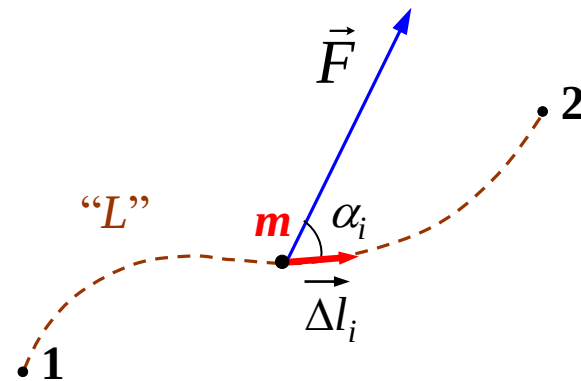


Пример:



$A_{T/2} - ??$

$$A_{12} = \sum_i \Delta A_i = \sum_i (F_i \cdot \Delta l_i \cdot \cos \alpha_i)$$



$$\Delta \vec{l}_i \rightarrow d\vec{l}$$

$$\Delta A_i \rightarrow \delta A$$

➡ “Опр.” Элементарной работой δA называется произведение проекции силы на направление малого перемещения $d\vec{l}$ точки приложения силы на модуль этого перемещения:

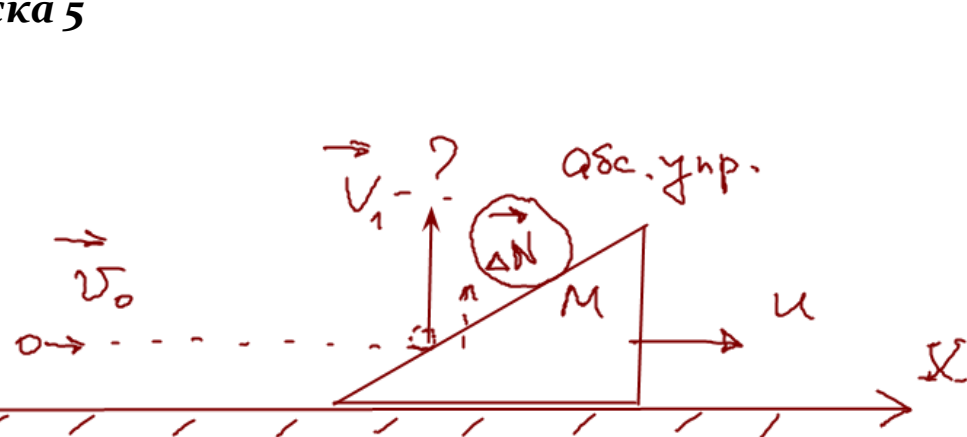
$$\delta A = F_l \cdot dl$$

$$\delta A = F \cdot dl \cdot \cos \alpha$$

➡ “Опр.” Работа на конечном участке траектории вычисляется как сумма элементарных работ:

$$A_{12} = \int_{"L"} F_l dl$$

Доска 5



$$0 = Mg - \underline{N_1}$$

$$\begin{cases} m v_0 = M u \\ \frac{m v_0^2}{2} = \frac{m v_1^2}{2} + \frac{M u^2}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow v_1 - ?$$

$$\vec{m v_0}$$

$$\vec{p} \text{ "до"}$$

$$\neq$$

$$\vec{p} \text{ "после"}$$

$$\vec{m v_1} + \vec{M u}$$

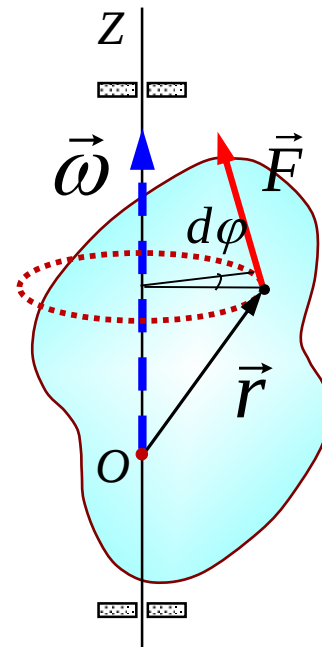
• Замечания:

1) Система отсчёта !

2) При вращении твёрдого тела:

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{l}) = (\vec{F}, \vec{V}dt) = (\vec{F}, [\vec{\omega}, \vec{r}])dt$$

$$\delta A = (\vec{F}, [\vec{\omega}, \vec{r}])dt = ([\vec{r}, \vec{F}], \vec{\omega})dt = (\vec{N}, \vec{\omega})dt = N_{\omega} \cdot \omega dt = N_z \cdot d\varphi$$



$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} N_z d\varphi$$

3) Мощность силы

► (Опр.) Мощность силы равна отношению работы δA , совершаемой за малый интервал времени dt к величине этого интервала:

$$\delta A = F dl \cos \alpha$$

$$v = \frac{dl}{dt}$$

$$W = F \cdot v \cdot \cos \alpha$$

или

$$W = (\vec{F}, \vec{V})$$

$$W = \frac{\delta A}{dt}$$

5.5. Механическая энергия

Энергия ?? Примеры:

Из недавнего (☺):

Слияние чёрных дыр: 3 массы Солнца (10^{47} Дж)

-----> в излучение гравитационных волн

- 1) от Солнца за год – 10^{30} Дж;
- 2) на Землю – 10^{25} Дж;
- 3) землетрясение – 10^{21} Дж;
- 4) Химическая связь – 10^{-18} Дж;
- 5) Ядерная связь – 10^{-11} Дж.

► (Опр.) Механическая энергия - физическая величина, измеряемая запасённой работой, которую способна совершить система тел



За счёт движения тел
системы

Кинетическая

T



За счёт взаимодействия тел
системы

Потенциальная

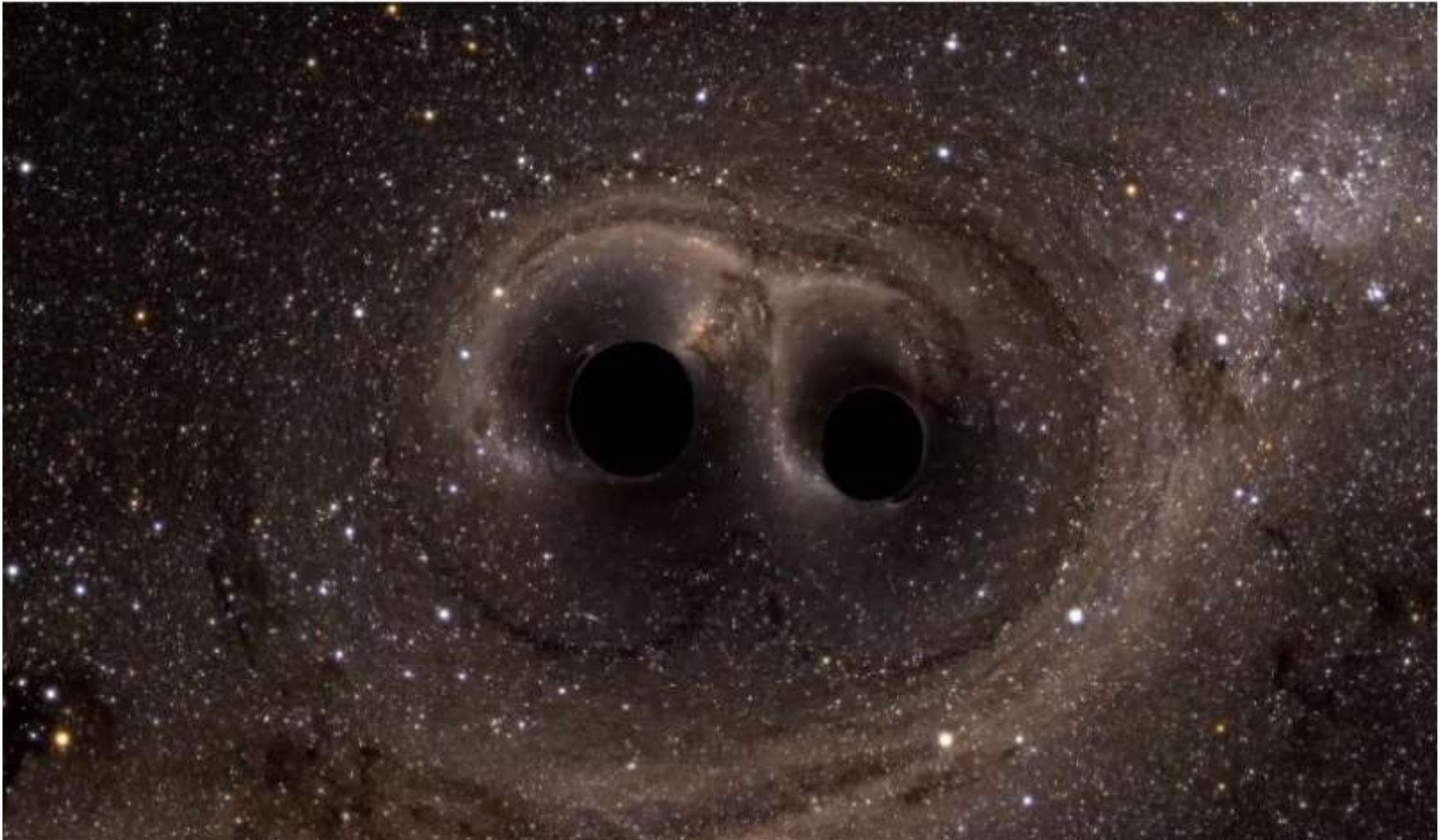
U

**Полная механическая
энергия**

$$T + U = \mathcal{E}$$

**Гравитационный коллапс за миллиард
световых лет от Земли – слияние чёрных дыр
(обнаружен 14.09.2015 → Нобель 2017 г.)**

!!



5.6. Кинетическая энергия. Теорема о кинетической энергии

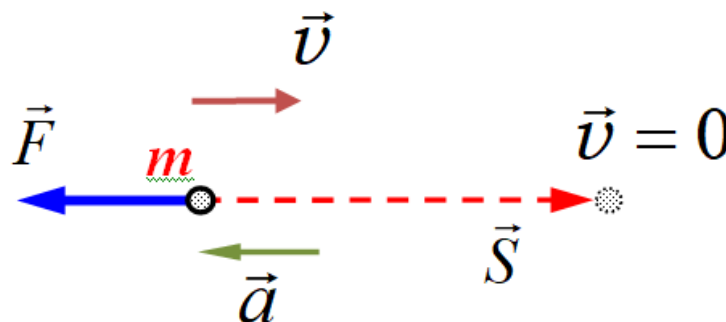
5.6.1. Кинетическая энергия

а) Одна частица (МТ)

➡ (Опр.)

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

$\frac{1}{2}$... ???

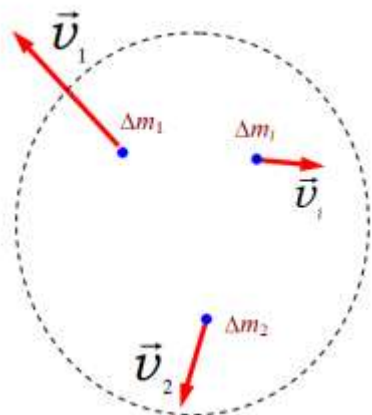


$$A_F = -\frac{mv^2}{2}$$

б) Система частиц (или ТТ):

➡ (Опр.)

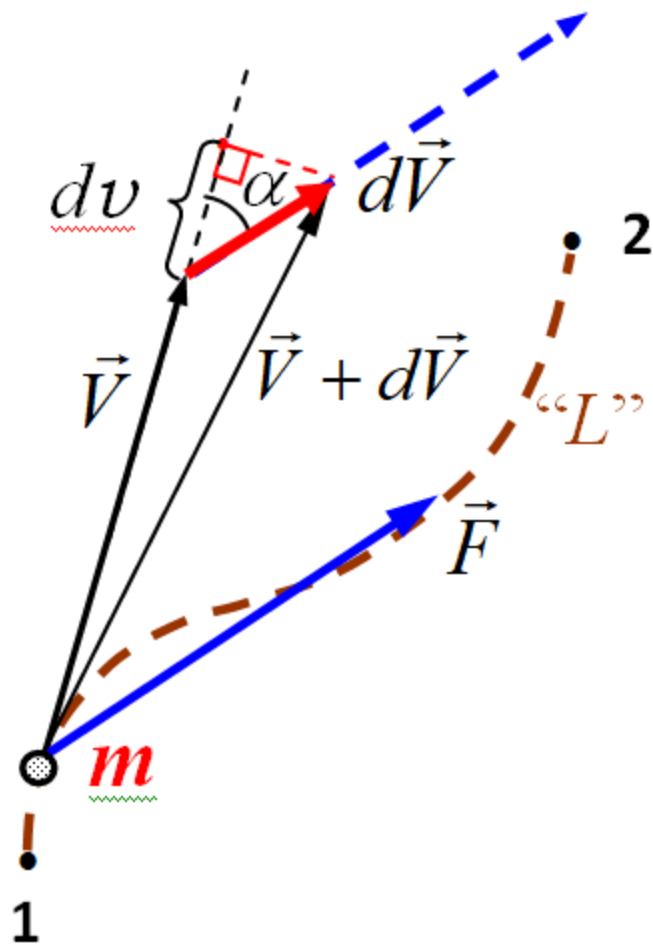
$$T = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta m_i v_i^2}{2}$$



• Замечания:

- 1) Система отсчёта ! ;
- 2) скаляр, > 0 ;
- 3) аддитивна.

5.6.2. Теорема о кинетической энергии



$$A_{12} = ?$$

$$\begin{aligned} \delta A &= (\vec{F}, d\vec{l}) = \left(m \frac{d\vec{V}}{dt}, \vec{V} dt\right) = \\ &= m(d\vec{V}, \vec{V}) = m \cdot \underbrace{|\vec{V}|}_{v} \cdot \underbrace{|d\vec{V}|}_{dv} \cdot \cos \alpha = \end{aligned}$$

$$mv \cdot dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \equiv dT ; \quad \downarrow$$

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} dT = T_2 - T_1$$

"L" ○ ○ ○

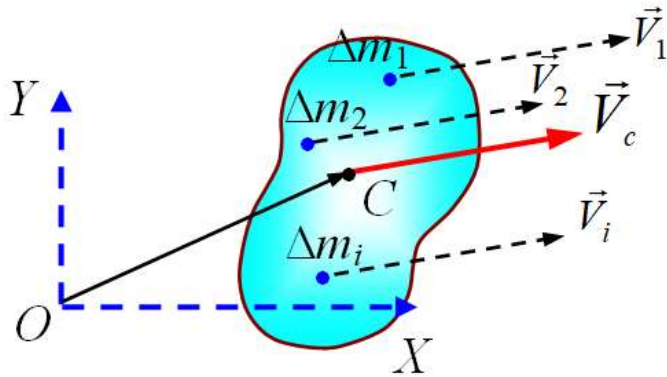
Теорема о кинетической энергии :

$$T_2 - T_1 = A_{12}$$

Пример:

5.7. Кинетическая энергия при движении твёрдого тела

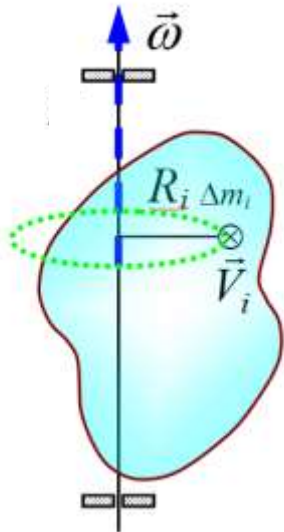
а) Поступательное движение



$$T_{\text{пост}} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{v_c^2}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \Delta m_i \Rightarrow$$

$$T_{\text{пост}} = \frac{mv_c^2}{2}$$

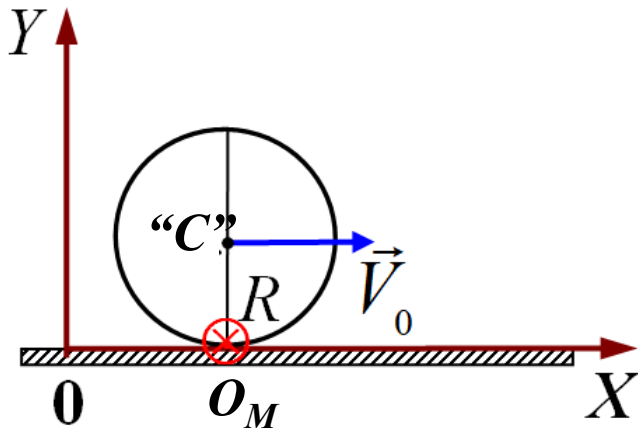
б) Вращательное движение



$$T_{\text{вращ.}} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta m_i (\omega R_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i R_i^2 \Rightarrow$$

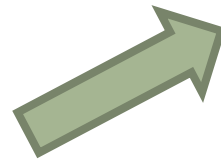
$$T_{\text{вращ}} = \frac{I\omega^2}{2}$$

в) Плоское движение



$$T = \frac{I_{O_M} \omega^2}{2}; \quad I_{O_M} = I_c + mR^2$$

$$T_{\text{плоск.}} = \frac{(I_c + mR^2) \omega^2}{2} = \frac{I_c \omega^2}{2} + \frac{m(R\omega)^2}{2} \Rightarrow$$



$$T_{\text{плоск.}} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}$$

5.8. Консервативные и неконсервативные силы

► (Опр.) Силы, работа которых не зависит от формы траектории, а определяется лишь начальным и конечным положением тела, называются консервативными

Примеры: гравитационные (тяжести), упругие, “кулоновские”, ...

Зам. Можно показать, что $A_{\Omega}^{(\kappa)} = 0$

Примеры: гравитационные (тяжести), упругие, “кулоновские”, ...

***) Всегда ли ? ...**

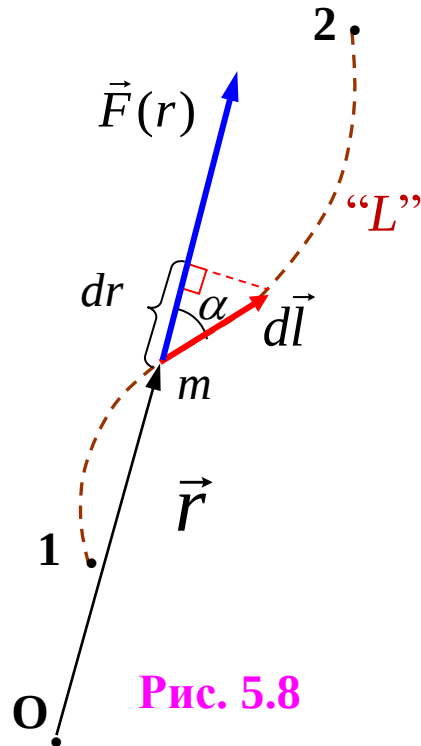
А неконсервативные? ? ...

... трения; реактивная сила; сила, действующая на заряженную частицу со стороны вихревого электрического поля, ...

$$A_{\Omega}^{(HK)} \neq 0$$

“Шкаф” ☺

Теорема о консервативности центральных сил



“Центральная сила” - ?

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_r(r) \cdot \vec{e}_r$$

(гравитационные, упругие, “кулоновские”)

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} (\vec{F}, d\vec{l}) = \int_{(1)}^{(2)} |\vec{F}| \cdot |d\vec{l}| \cdot \cos \alpha = \int_{r_1}^{r_2} f(r) dr$$

O - “Силовой центр”

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} f(r) dr = \Phi(r) \Big|_{r_1}^{r_2} = \Phi(r_2) - \Phi(r_1)$$

Консервативна

