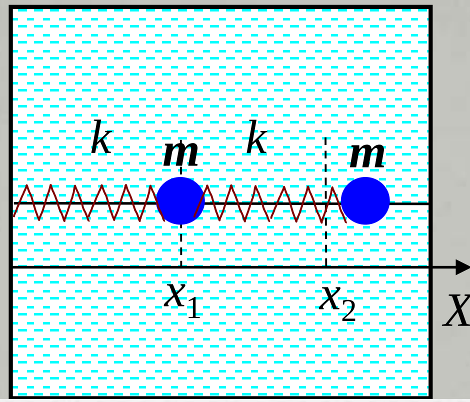
Лекция 3
Осциллятор с затуханием

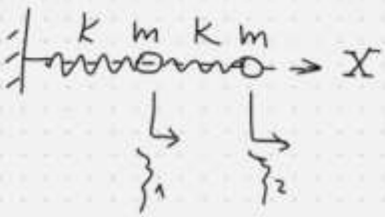
Долг по прошлой лекции –

несимметричная система связанных осцилляторов

Уже было, но мы повторим :



Задача 3.11



$$m\ddot{\xi}_1 = -k\xi_1 + k(\xi_2 - \xi_1) \quad \Big| :m$$

$$m\ddot{\xi}_2 = -k(\xi_2 - \xi_1) \quad \Big| :m, \ \times n, \ \text{„+"}$$

Норм. координаты: $\xi_{I,II} = \xi_1 + n_{I,II}\xi_2$

$$\ddot{\xi}_1 + n\ddot{\xi}_2 = -\frac{k}{m}\xi_1 + \frac{k}{m}\xi_2 - \frac{k}{m}\xi_1 - \frac{k}{m}n\xi_2 + \frac{k}{m}n\xi_1$$

$$\ddot{\xi}_1 + n\ddot{\xi}_2 = -\frac{k}{m}(2-n)\left[\xi_1 + \frac{n-1}{2-n}\xi_2\right]$$

$$\Rightarrow \frac{n-1}{2-n} = n$$

$$n - 1 = 2n - n^2$$

$$n^2 - n - 1 = 0, \quad n_{I,II} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$2 - n = 2 - \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}$$

$$\omega^2_{I,II} = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}$$

$$\ddot{\xi}_{I,II} + \omega^2_{I,II}\xi_{I,II} = 0$$

§ 3. Свободные затухающие колебания

3.1. Дифференциальное уравнение для осциллятора с затуханием

Уже было, но мы повторим (☺):

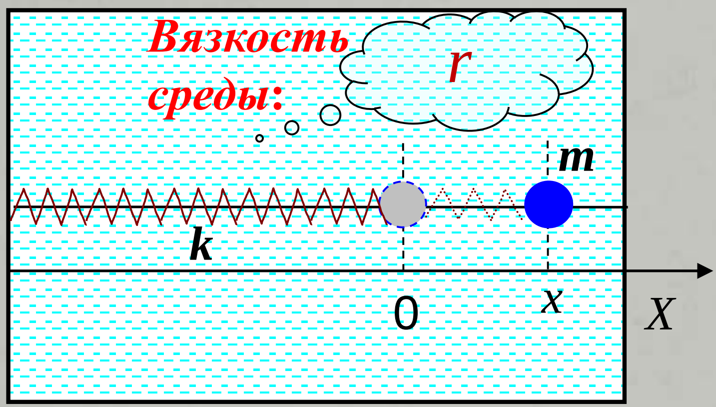


Рис. 1. Пружинный маятник в вязкой среде

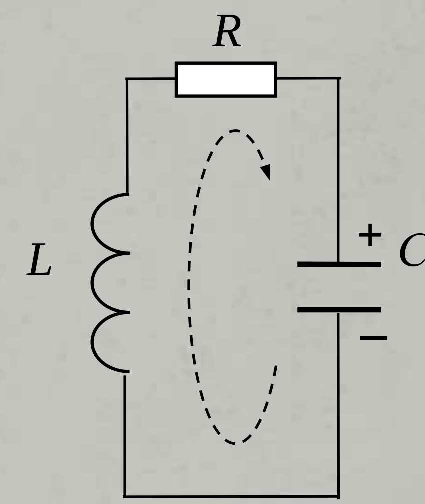


Рис. 2. Контур с затуханием

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

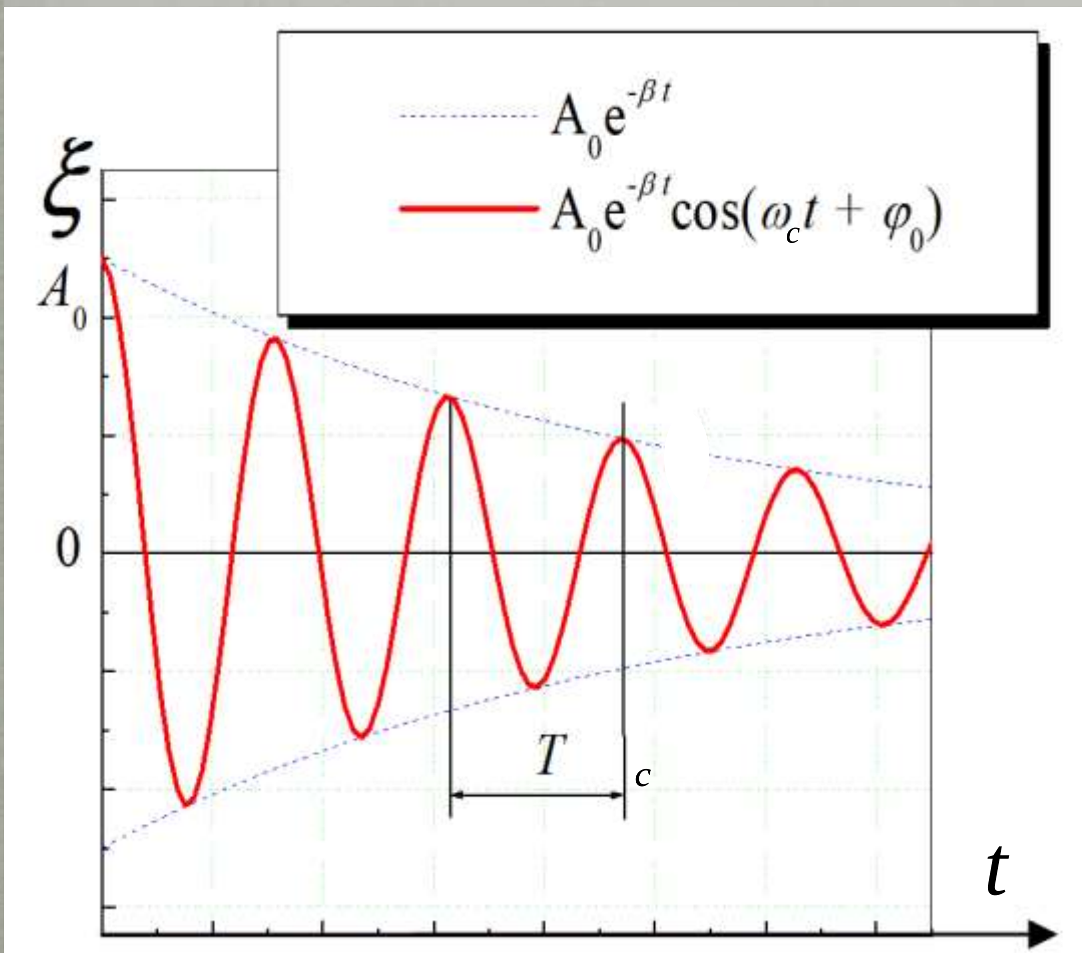
$$-L\ddot{q} = \frac{1}{C}q + R\dot{q}$$

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0$$

$$2\beta = \frac{R}{L}$$

3.2. Малое затухание: $\beta < \omega_0$

Вид решения: $\xi(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_c t + \varphi_0)$



Что тут нового?

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t}$$

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

"Собственная частота затухающих колебаний"

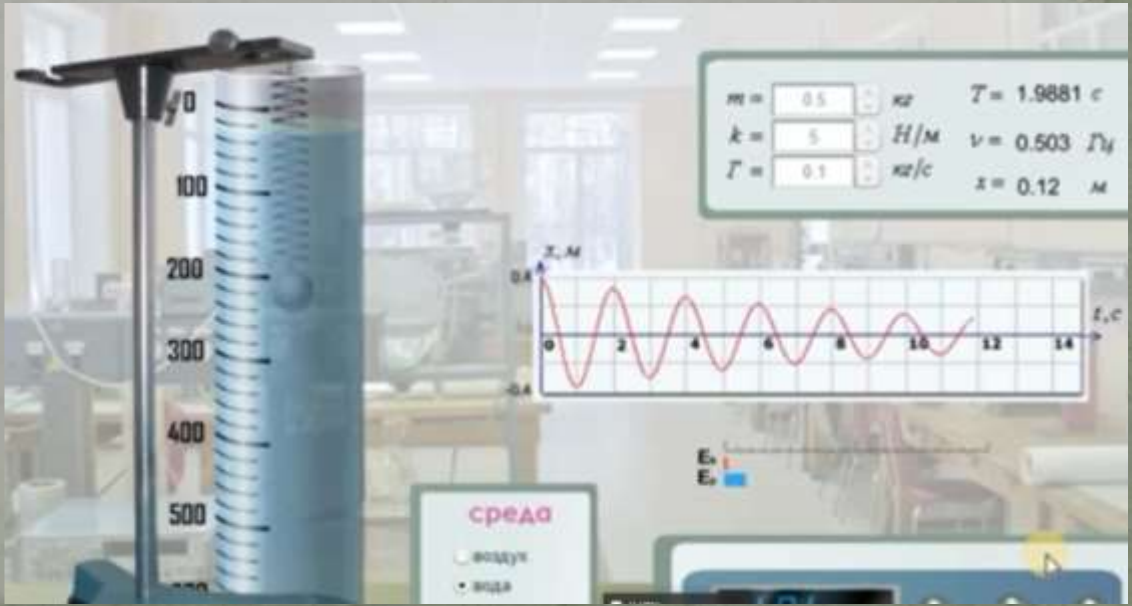
3.2. Малое затухание: $\beta < \omega_0$

Маятник с затуханием. Анимация

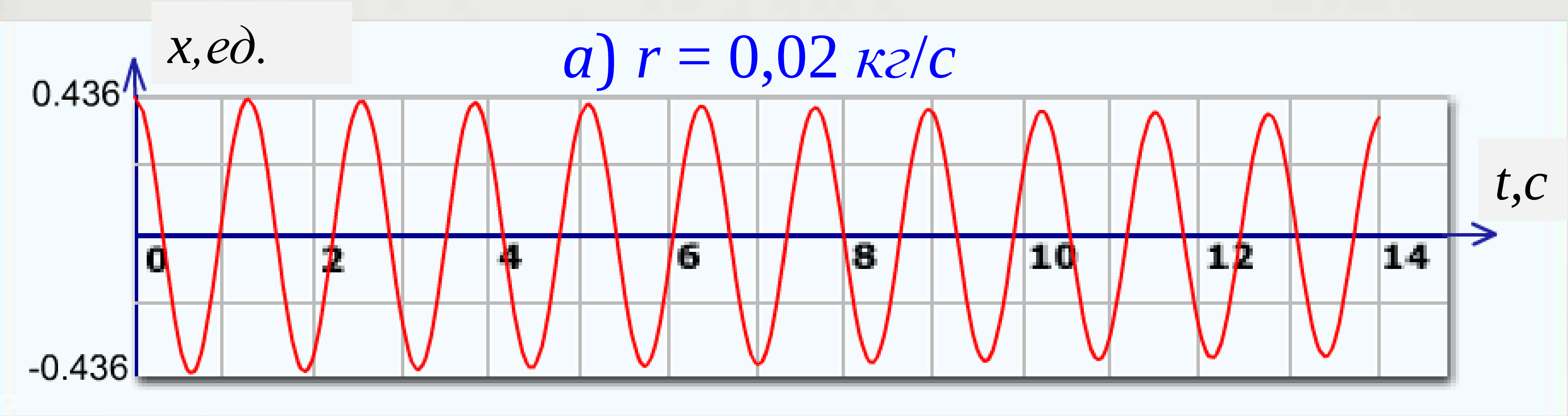
- http://somit.ru/roliki/fizm_z.swf

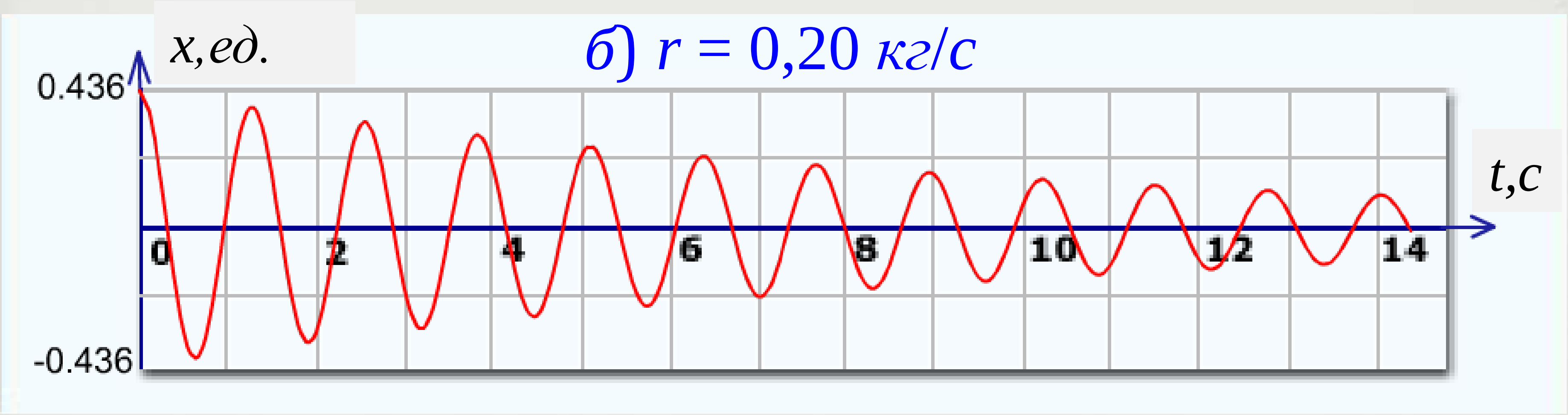
Пружинный маятник в воде

$r = 0{,}1$ *кг/с*



Малое затухание: $\beta < \omega_0$





3.3. Характеристики осциллятора с малым затуханием

- ***Коэффициент затухания*** β : $\Leftarrow$ *график* $\ln A = f(t)$

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t}$$

- ***Время релаксации амплитуды*** τ_A :

$$\frac{A_0}{A_0 e^{-\beta \tau_A}} = e \quad \Rightarrow \quad \tau_A = 1/\beta$$

- ***Количество колебаний*** N_e :

$$N_e = \frac{\tau_A}{T_c} = \frac{1}{\beta T_c}$$

- ***Декремент затухания – величин, равная отношению амплитуд двух последовательных колебаний*:**

$$D = \frac{A(t)}{A(t+T_c)} = e^{\beta T_c}$$

- ***Логарифмический декемент затухания*** :

$$\gamma = \ln D = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T_c = \frac{1}{N_e} \qquad \gamma \approx \frac{\Delta A_T}{A}$$

3.4. Добротность колебательной системы

Зам. …

СПОСОБЫ НАЙТИ добротность: $Q = \pi \cdot N_e$ **или** $\dfrac{\pi}{\gamma}$ **или** $\dfrac{\pi}{\beta T}$

Нельзя ли без π ? Вместо числа «*e*» подберём число «*k*»:

так, чтобы $\ln(k) = \pi$ ➡ $k = 23$ ➡ $Q = \pi \cdot N_e = N_k = N_{23}$

Д.З. Докажите это! ***подсказка*:** $\dfrac{A_0}{A_0 e^{-\beta \tau_k}} = k$

А ещё: $Q = \dfrac{\pi}{\gamma} = \dfrac{\pi}{\beta T_c} = \dfrac{\omega_c}{2\beta}$ $\left(\beta << \omega_0 : \quad Q \cong \dfrac{\omega_0}{2\beta} \right)$

А какие бывают добротности ?

1) Земная кора - сейсмические волны – $Q \cong 10^1 \div 10^3$;

2) «Маятники», …, струна, …, камертон, … – $Q \cong 10^1 \div 10^4$;

3) «колебательный контур» … $Q \sim 10^2$

4) пьезо-керамика, пьезокварц $Q \cong 10^5 \div 10^6$;

4) «СВЧ – резонаторы», …, оптические резонаторы, … $Q \cong 10^4 \div 10^7$;

5) Молекулы, атомы …, ядра атомов …, $Q \cong 10^4 \div 10^7 \div 10^{12}$;

…

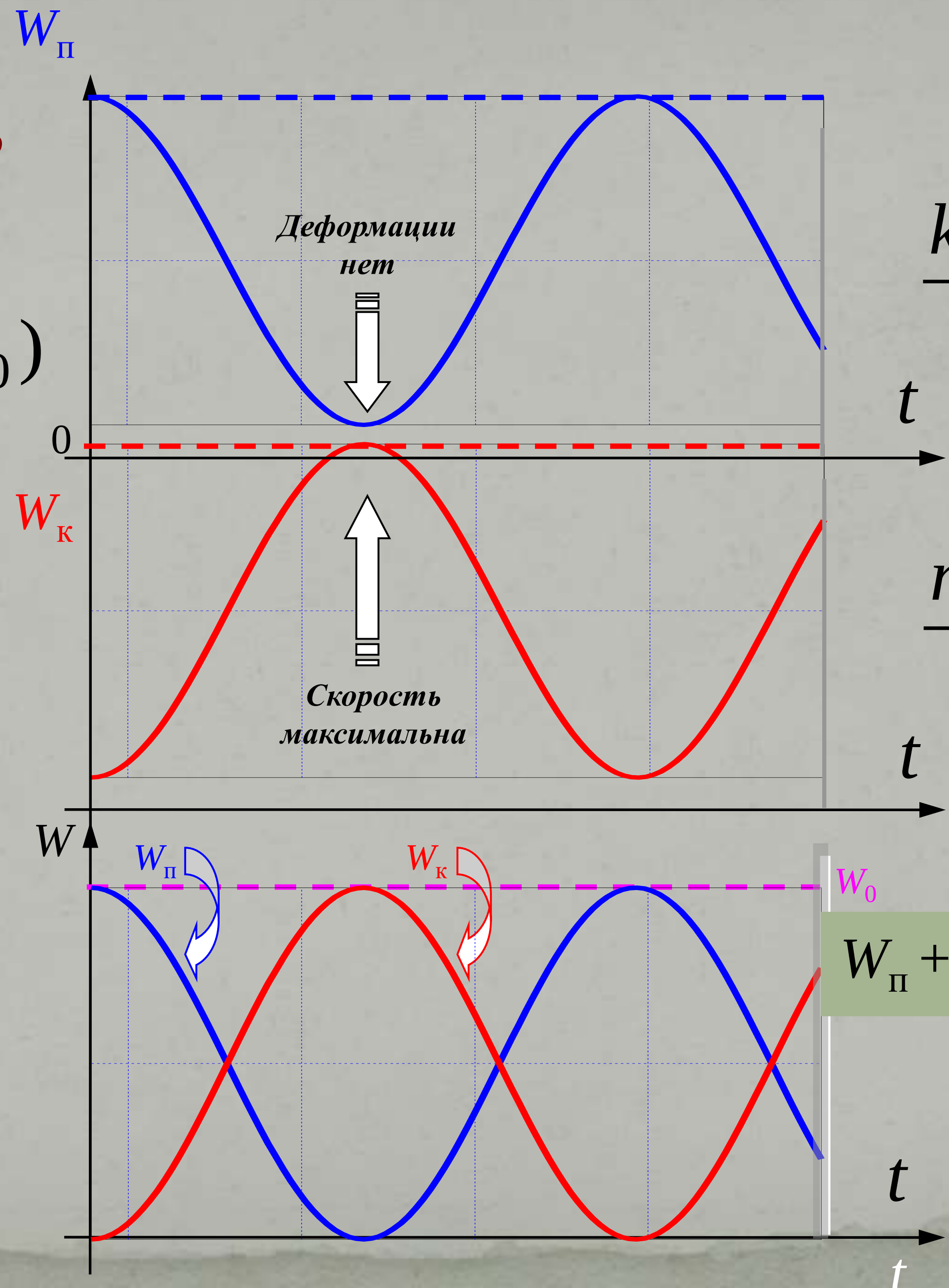
А ещё: ***Система «Лектор – аудитория»*** ***Д.З. : Q = ???*** ☺

3.5. Энергия затухающих колебаний

Уже было (Rem):

Энергия гармонического осциллятора

$$\xi(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$



$$\frac{k\xi^2(t)}{2}$$

$$\frac{m\dot{\xi}^2(t)}{2}$$

$W_п + W_к = const$

А W(t) осциллятора с малым затуханием

??

Энергия $W(t)$:

$$W_п(t) = \frac{k\xi^2(t)}{2} = \frac{kA_0^2}{2} e^{-2\beta t}\{1 + \cos[2(\omega_c t + \varphi_0)]\}$$

$$W_к(t) = \frac{m\dot{\xi}^2(t)}{2} = \ldots$$

Итог для W ... см. рис. на след. слайде

$$W(t) = W_к(t) + W_к(t) = \ldots$$

Ещё про “Добротность” ...

$$W(t) \approx W_0 \cdot e^{-2\beta t} = W_0 \cdot e^{-t/\tau_W}$$

(пренебрегая малыми пульсациями – см. рис.)

$$\frac{W(t)}{\Delta W_T(t)} = \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}}$$

При условии $\beta << \omega_0$: $e^{-2\beta T} \approx 1 - 2\beta T$

$$\frac{W(t)}{\Delta W_T(t)} \approx \frac{1}{2\beta T_c} = \frac{N_e}{2} = \frac{1}{2\gamma} \Rightarrow$$

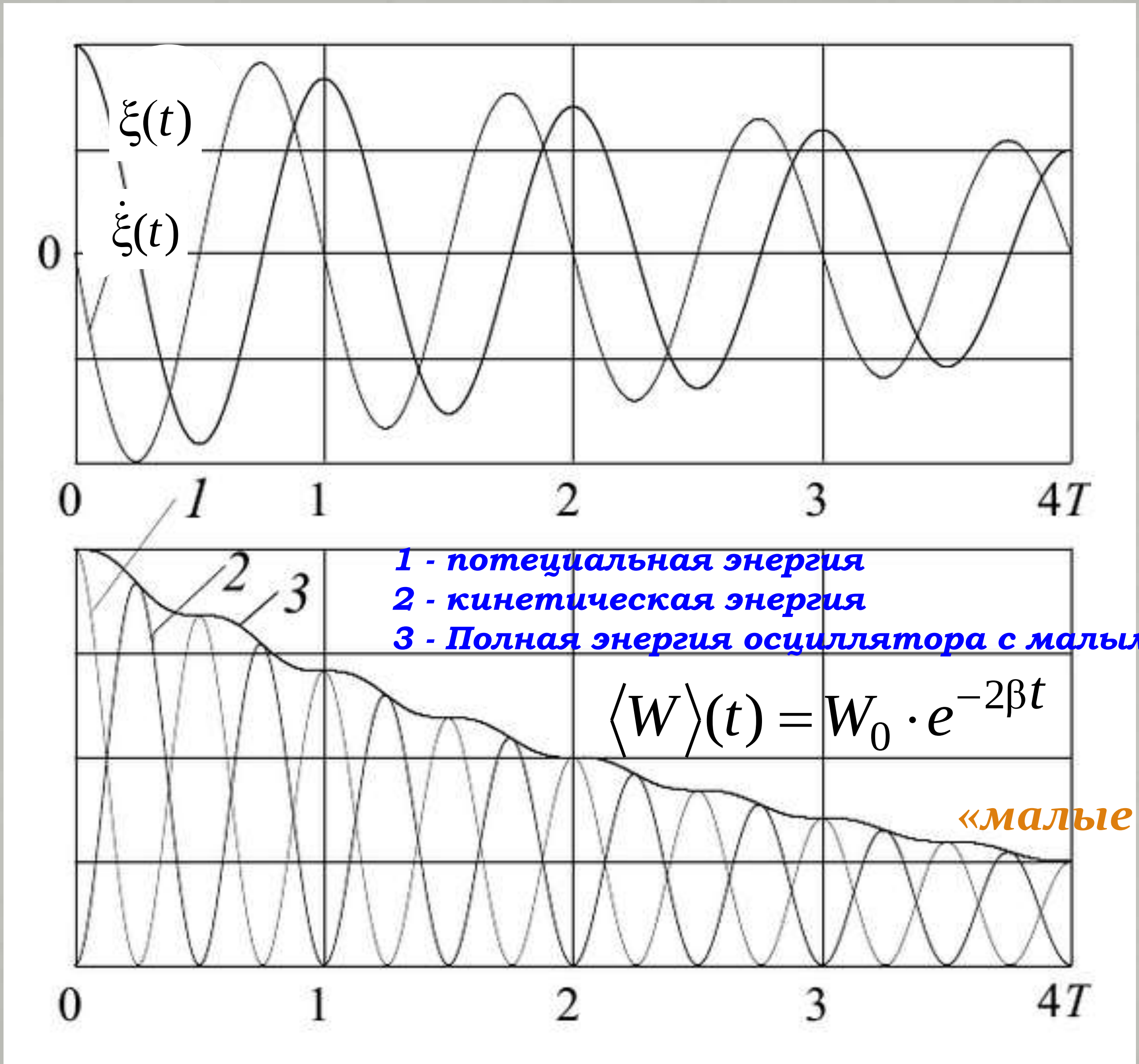
$$Q \cong 2\pi \cdot \frac{W(t)}{\Delta W_T(t)}$$

(**Опр.**) ***Добротность пропорциональна отношению энергии, запасённой осциллятором, к энергии, теряемой за период при свободных колебаниях***

... и ещё:

$$Q = \frac{\omega_c}{2\beta} = \omega_c \tau_W \cong \omega_0 \tau_W$$

Энергия осциллятора с малым затуханием



1 - потециальная энергия
2 - кинетическая энергия
3 - Полная энергия осциллятора с малым затуханием

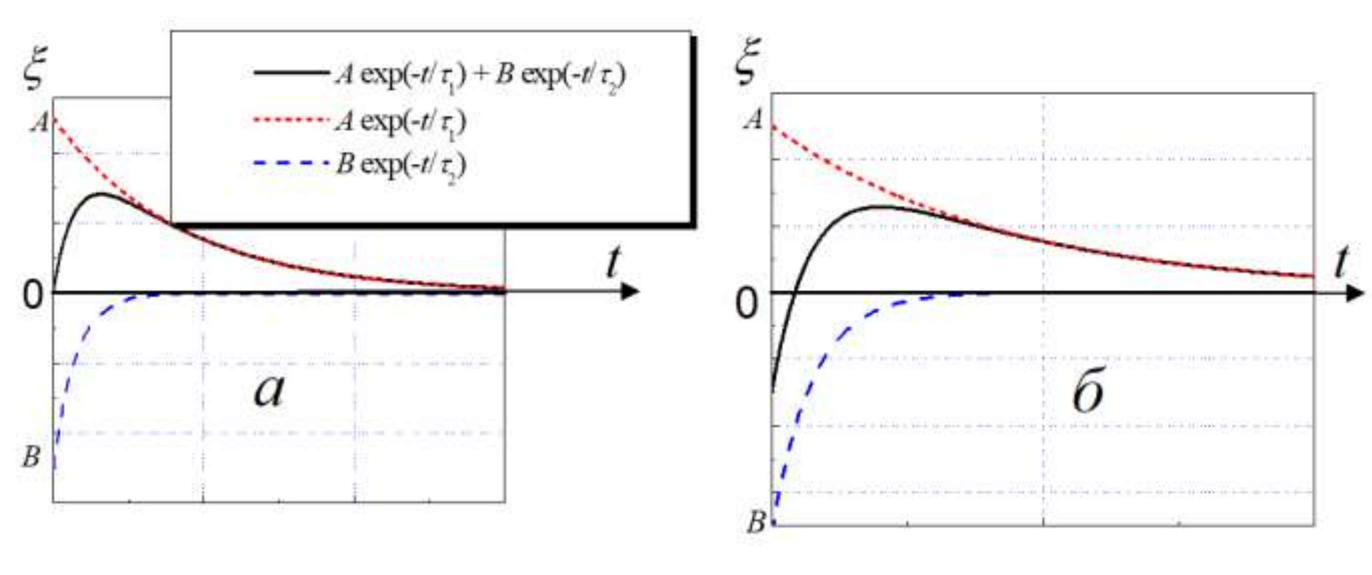
$$\langle W \rangle(t) = W_0 \cdot e^{-2\beta t}$$

«малые пульсации W(t)

3.6. Осциллятор с большим затуханием. Релаксация

3.6.1. Большое затухание: $\beta > \omega_0$

другой вид решения: $\xi(t) = e^{-\beta t}\left(Ae^{\beta_1 t} + Be^{-\beta_1 t}\right) = A\cdot e^{-t/\tau_1} + B\cdot e^{-t/\tau_2}$



$$\beta_1 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\beta - \beta_1},$$

$$\tau_2 = \frac{1}{\beta + \beta_1}$$

"Большое затухание"

а) $\xi(0) = 0$

$\dot{\xi}(0) = \upsilon_0$

б) $\xi(0) = \xi_0$

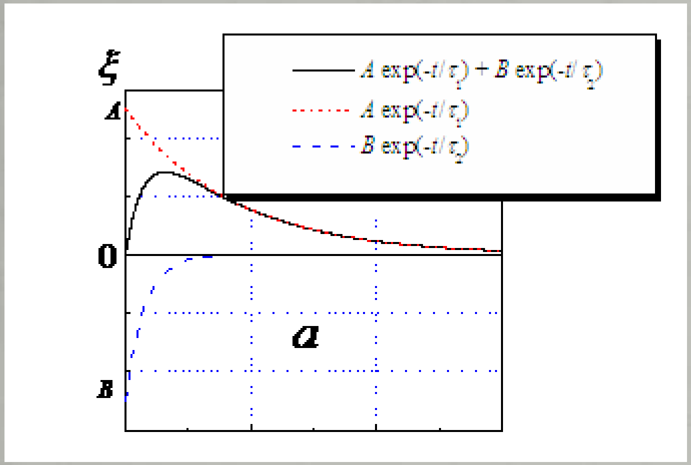
$\dot{\xi}(0) = 0$

3.6. Осциллятор с большим затуханием. Релаксация

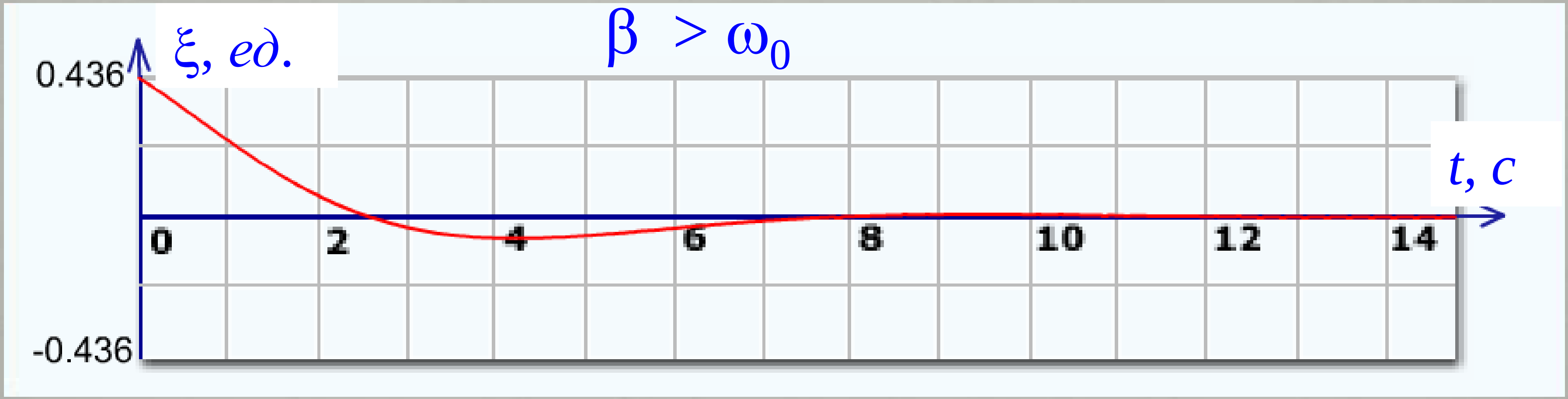
Маятник «в масле»: $\beta \le \omega_0$, $r = 1$ *кг/с*

Маятник «в масле»: $\beta > \omega_0$, $r = 2$ *кг/с*

Большое затухание: $\beta \geq \omega_0$



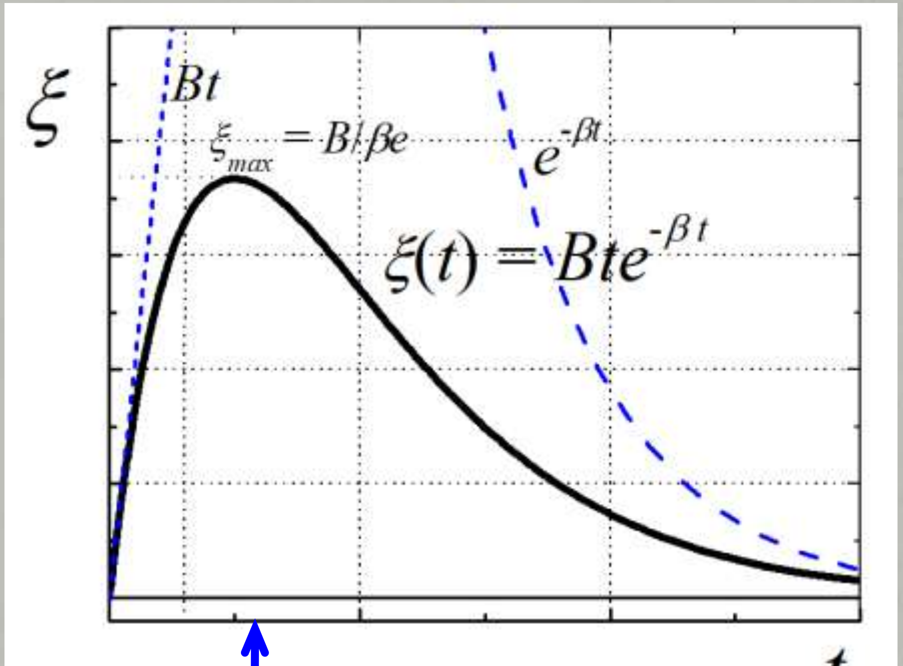
$$\xi(t) = A \cdot e^{-t/\tau_1} + B \cdot e^{-t/\tau_2}$$



3.6.2. Критический режим осциллятора: $\beta = \omega_0$

$$\beta_1 = 0$$

Вид решения: $\xi(t) = (A + B\cdot t)e^{-\beta t}$



$t_{max} = 1/\beta$

$a)\ \xi(0) = A = 0;$

$$\dot{\xi}(0) = B = \upsilon_0$$

$$\xi_{max} \sim \upsilon_0$$

“баллистические приборы”

3.7. Особенности затухающих колебаний в системе связанных осцилляторов

1) Число мод = …

2) Разная добротность мод ⇒ спектры …

3) Энергетическая независимость мод …
… искажения «гармоничности мод» …
появление «гармоник»

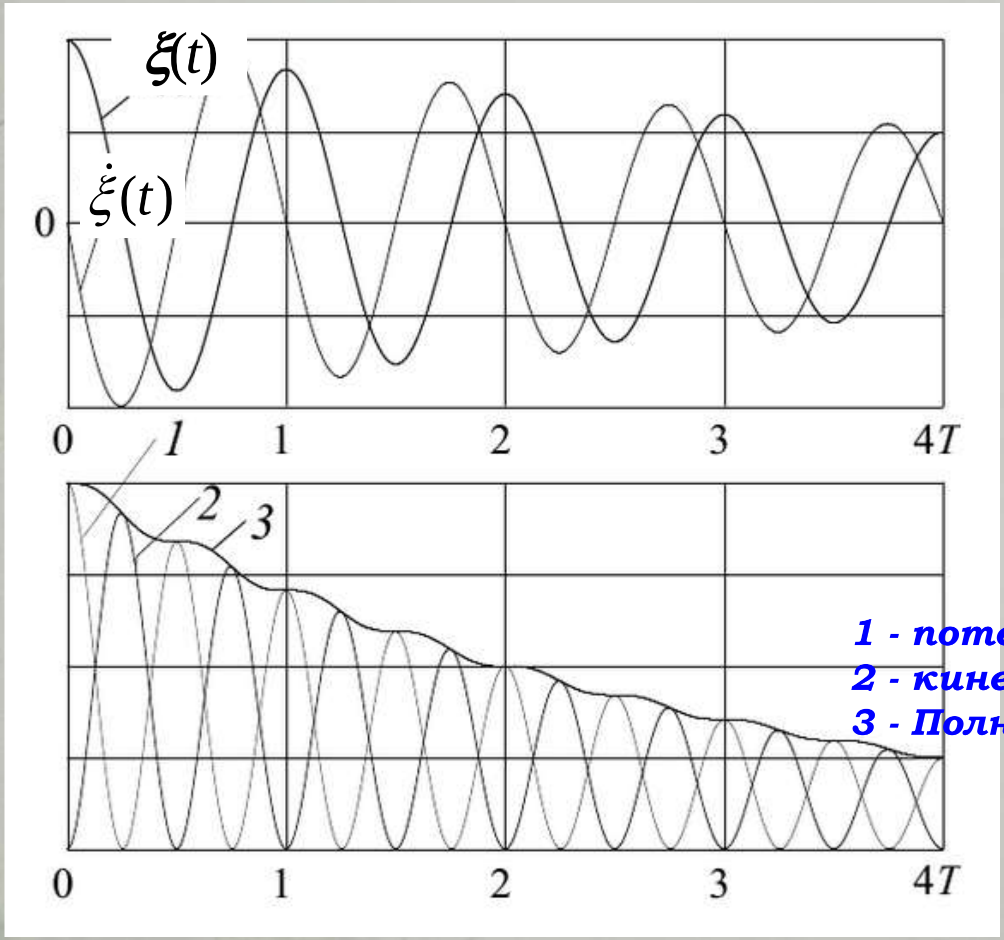
4) Большое затухание – «моды исчезают»
… ☺

Глава II. Вынужденные колебания

§ 1. Вынужденные механические колебания при гармоническом внешнем воздействии

1.1. Дифференциальное уравнение для вынужденных колебаний

Rem :



Свободные

Затухающие

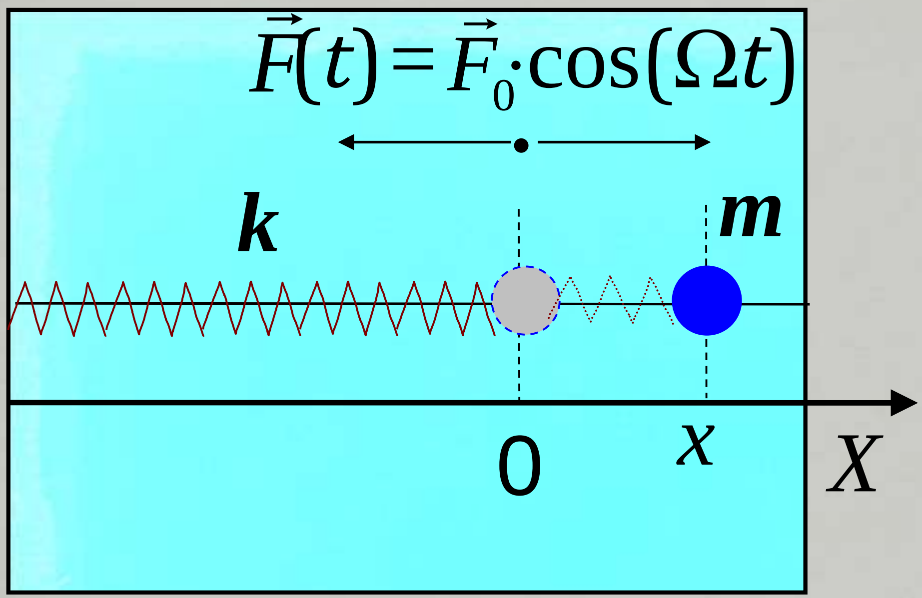
Энергия осциллятора с затуханием

1 - потециальная энергия
2 - кинетическая энергия
3 - Полная энергия осциллятора с затуханием

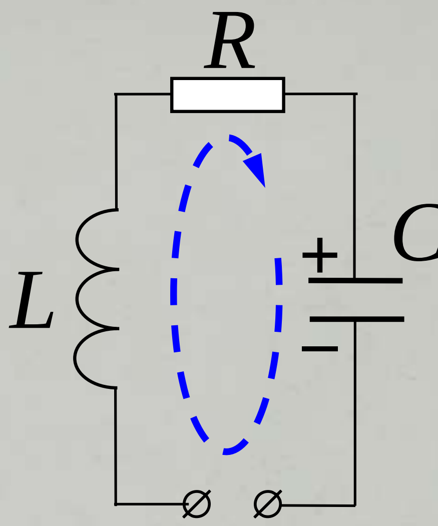
$$\langle W\rangle(t) = W_0 \cdot e^{-2\beta t}$$

Убыль надо восполнять **!**

К выводу уравнения вынужденных колебаний



или



$$u(t) = u_0\cos(\Omega t)$$

$$m\ddot{x}=-r\dot{x}-kx+F_0\cos(\Omega t)$$

$$-L\ddot{q}+u_0\cos(\Omega t)=\frac{1}{C}q+R\dot{q}$$

Итог:

$$\boxed{\ddot{\xi}+2\beta\dot{\xi}+\omega_0^2\xi=f_0\cdot\cos(\Omega t)}$$

$f_0 = F_0/m$ или u_0/L

1.2. Вид решения дифференциального уравнения для вынужденных колебаний

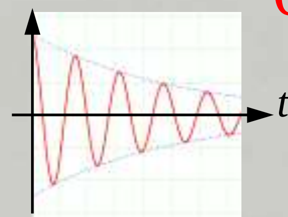
Математика: “общее однородного + частное неоднородного”

Свободные:

$$\xi(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_c t + \varphi_0) \quad + \quad \text{“частное”}$$

0

Но при $t \gg \tau_A = 1/\beta$:



И останутся:

$$\xi_{у.в.к.}(t) = \mathcal{A} \cdot \cos(\Omega t - \alpha)$$

Установившиеся вынужденные колебания (у.в.к.)

$\mathcal{A}$ – *амплитуда установившихся вынужденных колебаний;*

Ω - *частота у.в.к.;*

α - *сдвиг фаз у.в.к.*

Замечания:

1) у.в.к.;

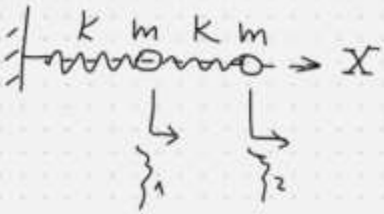
2) Ω;

3) “α”

4) $\mathcal{A}$ и α - ??

Приложение

Доска 1



$$m\ddot{\xi}_1 = -k\xi_1 + k(\xi_2 - \xi_1) \qquad :m$$

$$m\ddot{\xi}_2 = -k(\xi_2 - \xi_1) \qquad :m, \quad \times n, \quad \text{„+"}$$

Норм. координаты: $\xi_{I,II} = \xi_1 + n_{I,II}\,\xi_2$

$$\ddot{\xi}_1 + n\ddot{\xi}_2 = -\underline{\frac{k}{m}\xi_1} + \frac{k}{m}\xi_2 - \underline{\frac{k}{m}\xi_1} - \frac{k}{m}n\xi_2 + \underline{\frac{k}{m}n\xi_1}$$

$$\ddot{\xi}_1 + n\ddot{\xi}_2 = -\frac{k}{m}(2-n)\left[\xi_1 + \frac{n-1}{2-n}\xi_2\right]$$

$$\Rightarrow \frac{n-1}{2-n} = n$$

$$n - 1 = 2n - n^2$$

$$n^2 - n - 1 = 0, \qquad n_{I,II} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$2 - n = 2 - \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}$$

$$\ddot{\xi}_{I,II} + \omega^2_{I,II}\,\xi_{I,II} = 0$$

$$\omega^2_{I,II} = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}$$

Приложение

Доска 2

$$F_x(t) = F_0 \cdot \cos \Omega t$$

$$m\ddot{x} = -kx - r\cdot\dot{x} + F_0\cdot\cos\Omega t$$

Ω ; ω_0, ω_c – своб.

Ω – вынужд.

$$\boxed{\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = f_0 \cdot \cos\Omega t}$$

$2\beta = \frac{r}{m}$; $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ $\qquad f_0 = \frac{F_0}{m}$;

неоднородное диф. ур-ие

→ „математика": общ. реш. однор. д.у. + частн. неоднор.

→ „физика" $\quad A_0 e^{-\beta t}\cdot\cos(\omega_c t + \varphi_0) + \underbrace{A\cdot\cos(\Omega t - \alpha)}_{\text{у.в.к.}}$!

$t \gg \tau_A = 1/\beta$ собств. затух. $\to 0$!

Приложение

Доска 3