Лекция 4. Вынужденные колебания

1.3. Амплитуда ($\mathcal{A}$) и фаза (α) установившихся вынужденных колебаний

??

Метод векторных диаграмм

!!

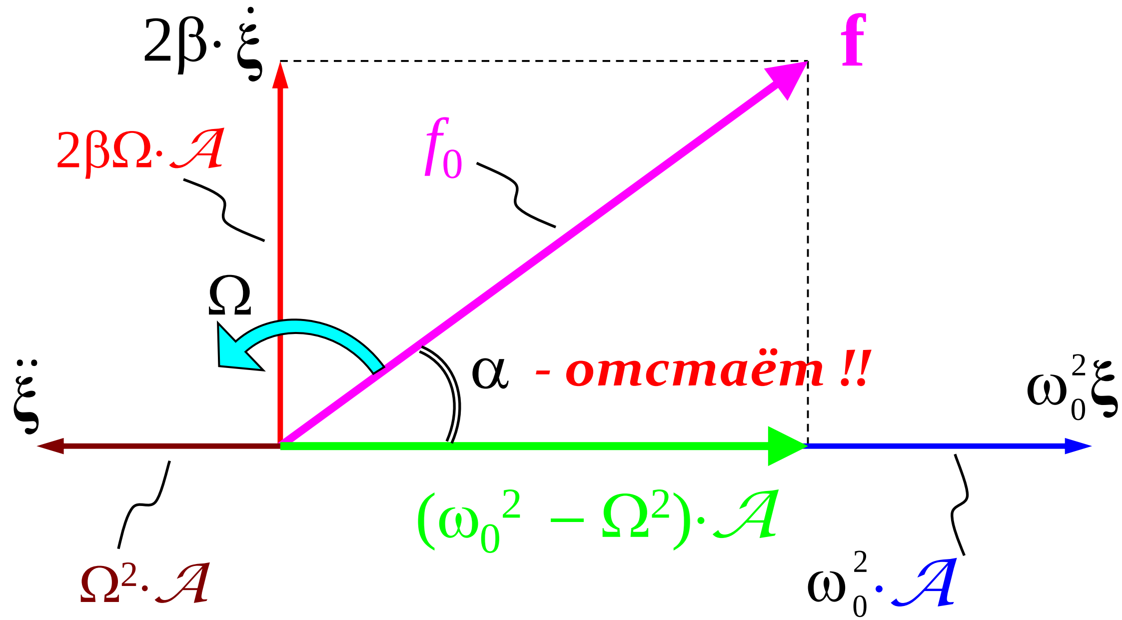
$$\xi(t)=\mathcal{A}\cdot\cos(\Omega t-\alpha)$$

$$\dot{\xi}(t)=\mathcal{A}\Omega\cdot\cos(\Omega t-\alpha+\pi/2)$$

$$\ddot{\xi}(t)=\mathcal{A}\Omega^2\cdot\cos(\Omega t-\alpha+\pi)$$

Гармонические функции

$$\ddot{\xi}+2\beta\dot{\xi}+\omega_0^2\xi=f_0\cdot\cos(\Omega t)$$



"Урожай"

"Векторы-колебания"

1.4. Резонансные кривые. Резонанс

Теорема Пифагора: $\mathcal{A}^2\cdot[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2]=f_0^2 \quad \Rightarrow$

“Урожай”:

$$\mathcal{A}(\Omega)=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2\beta\,\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$$

ω_0, β, f_0 - константы данной колебательной системы. Меняем Ω **!** $\Rightarrow$

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}(\Omega)$$

$$\alpha=\alpha(\Omega)$$

!!

“Амплитудно-частотная” и
“фазо-частотная” зависимости

“Резонансные” **??**

Ассимптотики:

а) $\Omega \ll \omega_0$:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{\Omega\to 0} = \dfrac{f_0}{\omega_0^2}, \\ \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{2\beta\,\Omega}{\omega_0^2} \to 0, \quad \alpha \to 0 \end{cases}$$

ассимптотика "$\Omega \to 0$" *или* "**нч**"

б) $\Omega \gg \omega_0$:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\Omega) = \dfrac{f_0}{\Omega^2} \to 0 \\ \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{-2\beta}{\Omega} \to -0, \quad \alpha \to \pi \end{cases}$$

ассимптотика "$\Omega \to \infty$" *или* "**вч**"

ω_0, β, f_0 – константы данной колебательной системы ! $\Rightarrow$

в) $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Omega)$ и $\alpha = \alpha(\Omega)$ ***!!***

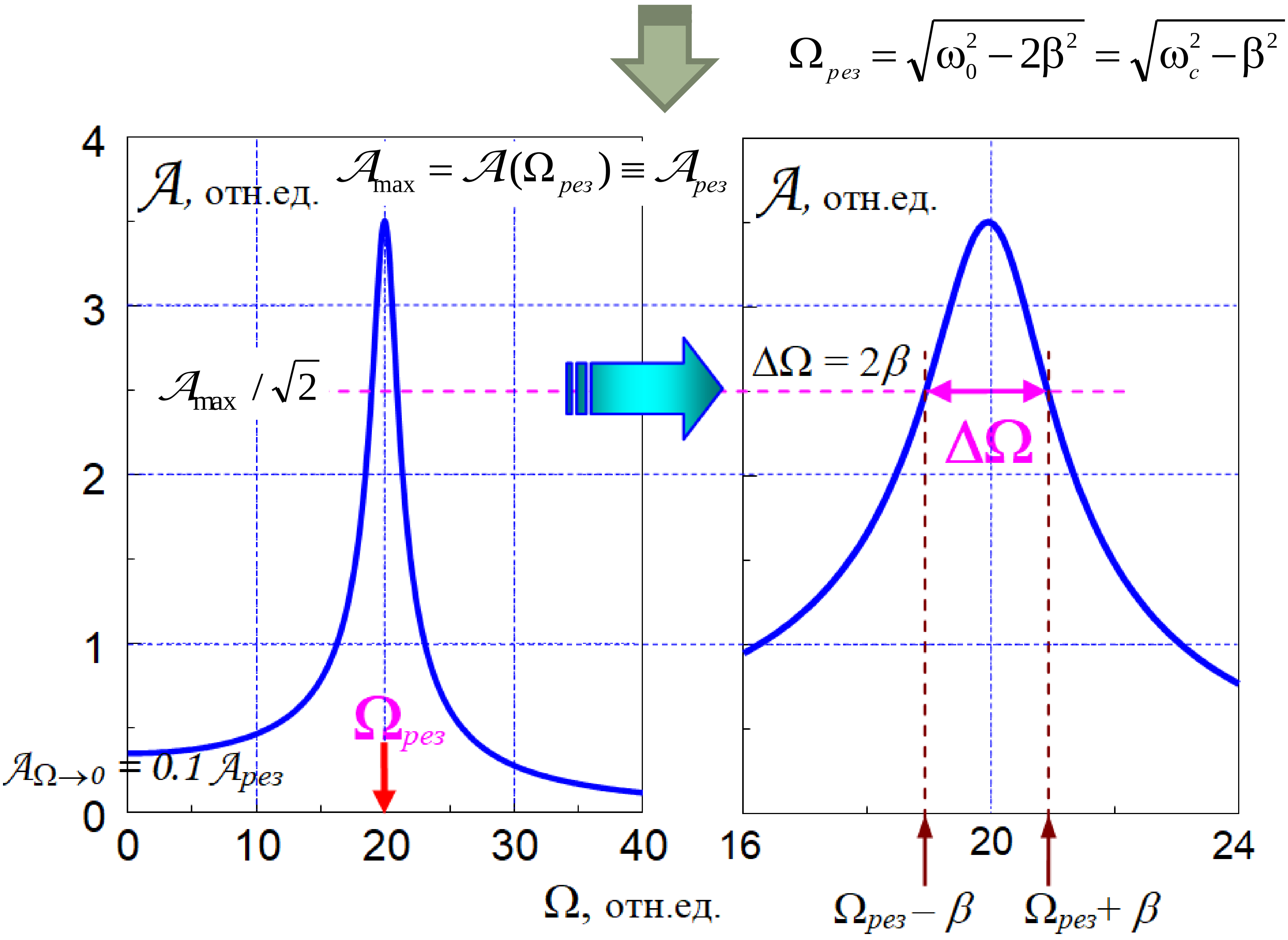
"Амплитудно-частотная" и "фазо-частотная" зависимости

Зависимость с экстремумом !!

"***Резонансные***" **??**

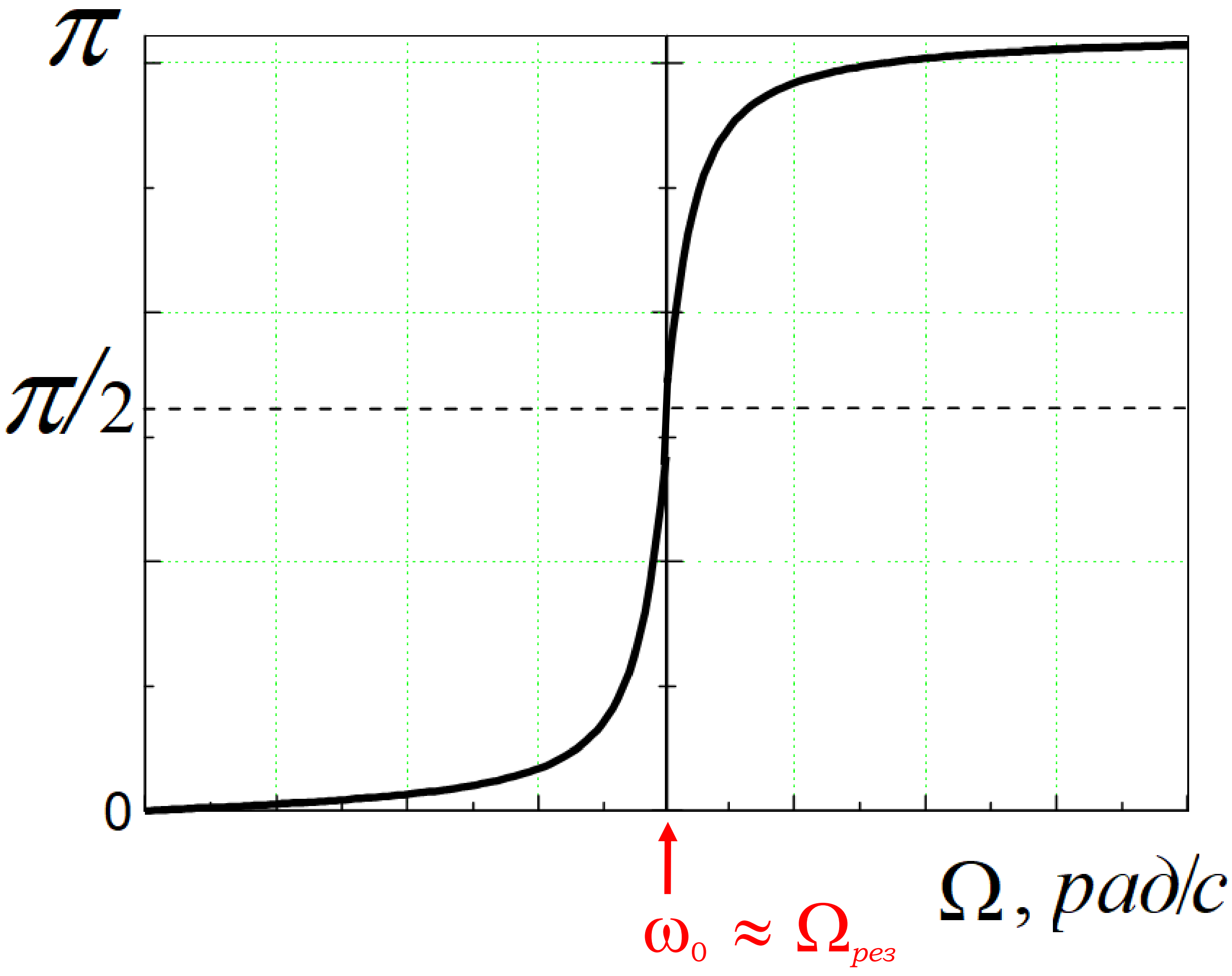
Амплитудная резонансная зависимость

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega_c^2 - \beta^2}$$



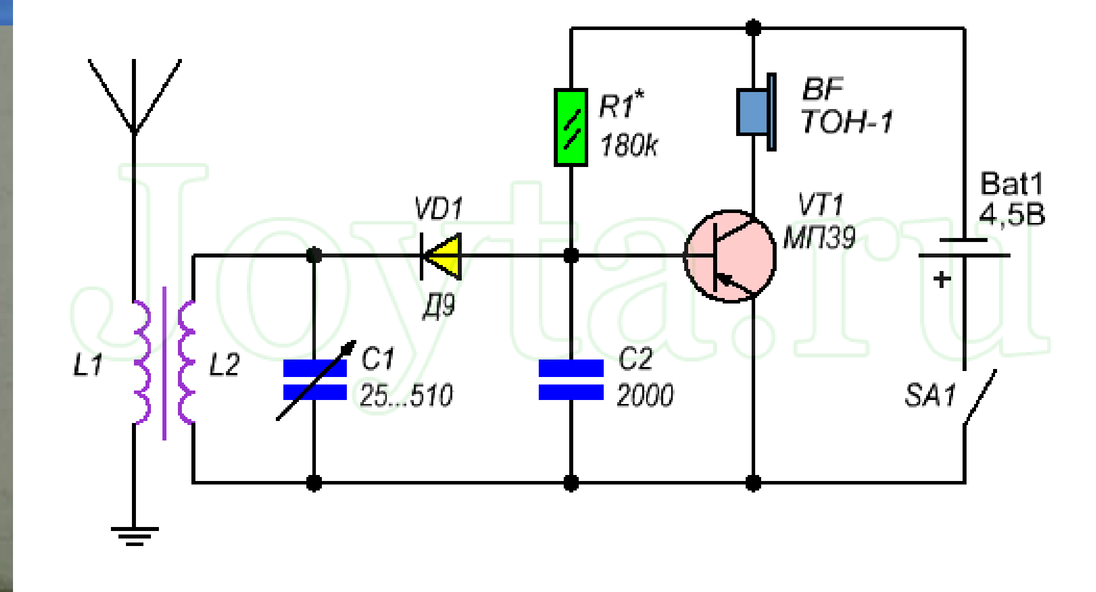
Фазовая частотная зависимость

$$\alpha = \alpha(\Omega)$$



О пользе резонанса

Радиоприёмник



Ещё раз (ввиду важности): $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Omega)$

Зависимость с экстремумом !!

(*Опр.*) **Резонанс** – *явление, которое состоит в том, что амплитуда вынужденных колебаний оказывается максимальной при частоте внешнего воздействия, близкой к собственной частоте колебательной системы*

Или: $\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ $\qquad \Omega_{рез} = \sqrt{\omega_c^2 - \beta^2}$

$$\mathcal{A}_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\omega_c}\ , \quad \text{а при } \beta << \omega_0: \quad \mathcal{A}_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0}$$

Rem: $\mathcal{A}_{\Omega\to 0} = \dfrac{f_0}{\omega_0^2},$ $\qquad (\text{tg}\alpha)_{рез} \approx \dfrac{\omega_0}{\beta}; \quad \alpha_{рез} \approx \dfrac{\pi}{2}$

(*Опр.*) ***Добротность***

$$\frac{\mathcal{A}_{рез}}{\mathcal{A}_{\Omega\to 0}} \approx \frac{\omega_0^2}{2\beta_c} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = Q \ \textbf{?} \quad Q = \frac{\mathcal{A}_p}{\mathcal{A}_{\Omega\to 0}}$$

А ещё **?** $\quad Q = \dfrac{\Omega_{рез}}{\Delta\Omega}$ **!!**

$\Delta\Omega = 2\beta$

- Разрушение бокала звуком

… и моста Такома ветром

1.5. Резонанс «скорости» ($\dot{\xi}$)

"Урожай" продолжаем собирать :

$$\dot{\xi}(t) = \mathcal{A} \cdot \Omega \cdot \cos(\Omega t - \alpha + \pi / 2)$$

$$\mathcal{A}_v = \mathcal{A} \cdot \Omega$$

амплитуда «скорости»

$$\mathcal{A}_v(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega) \cdot \Omega$$

$$\mathcal{A}_v(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right)^2 / \Omega^2 + 4\beta^2}}$$

В чём разница **?**

1) ***"из нуля"***;

2) $\Omega_{рез} = \omega_0$

1.6. Мощность, затрачиваемая для поддержания вынужденных колебаний

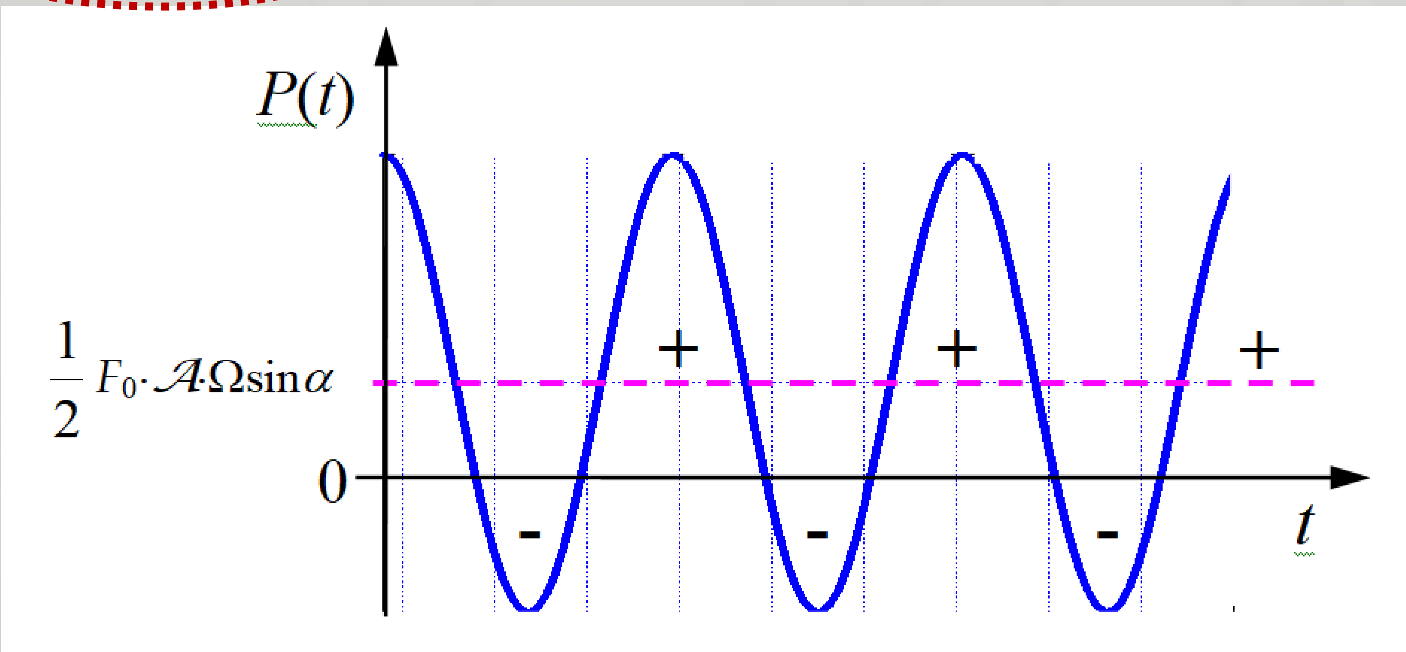
$$P(t) = F(t)\cdot\dot{\xi}(t)$$

мгновенная **!**

$$P(t) = F_0\cos(\Omega t)\cdot\mathcal{A}\cdot\Omega\cdot\cos(\Omega t-\alpha+\pi/2) = \{\ \text{“сила”}\times\text{“скорость”}\ \}$$

$$= \frac{1}{2}F_0\cdot\mathcal{A}\cdot\Omega\cdot\left[\underbrace{\cos(2\Omega t-\alpha+\pi/2)}_{\text{гармоническая функция времени с частотой } 2\Omega}+\underbrace{\cos(\alpha-\pi/2)}_{\text{константа !!}}\right]$$

для данной частоты Ω: !

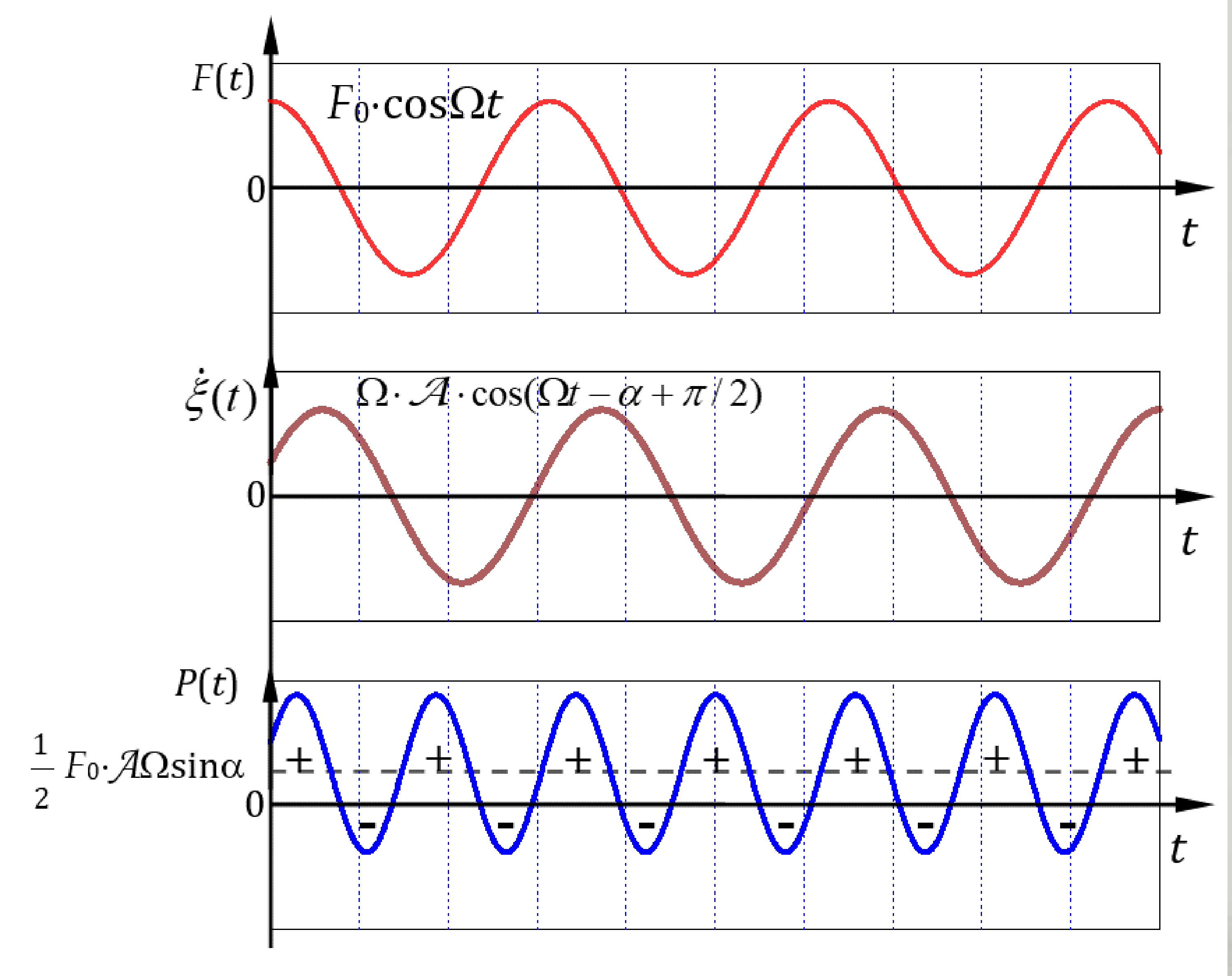


$$P(t) = \frac{1}{2} F_0 \cdot \mathcal{A} \cdot \Omega \cdot \left[\cos(2\Omega t - \alpha + \pi/2) + \cos(\alpha - \pi/2)\right]$$

гармоническая функция времени с частотой 2Ω

константа !!

!



Средняя мощность: "Источник" (сила / генератор) передаёт осциллятору "в единицу времени" энергию:

$$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$$

*Для **данного** осциллятора и на **данной** частоте*:

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}F_0\cdot\Omega\cdot\mathcal{A}\cdot\sin\alpha$$

Энергия, передаваемая за период:

$$\Delta W_T = \langle P\rangle\cdot T$$

необратимо ("без-воз-мез-дно" ☺) !

$$\mathcal{A}\cdot\sin\alpha \equiv \mathcal{A}_n$$

"Амплитуда поглощения"

А как $\langle P\rangle$ зависит от частоты Ω?

$$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{2}F_0\cdot\Omega\cdot\mathcal{A}\cdot\sin\alpha = \left\{ \sin\alpha = \frac{2\beta\cdot\Omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}};\quad \mathcal{A}(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}} \right\}$$

Ищем $\langle P\rangle = f(\Omega)$ **?**

$$(\Omega^2-\omega_0^2)^2 = \left[(\Omega-\omega_0)\cdot\underbrace{(\Omega+\omega_0)}_{\approx 2\Omega}\right]^2 \approx (\Omega-\omega_0)^2\cdot 4\Omega^2$$

$$\sim \frac{\beta^2\cdot\Omega^2}{4(\omega_0-\Omega)^2\cdot\Omega^2+4\beta^2\cdot\Omega^2}$$

$$\langle P\rangle \sim \mathcal{R}(\Omega) = \frac{\beta^2}{(\omega_0-\Omega)^2+\beta^2}$$

1.7* "Лоренцева" функция формы линии (поглощения)

(в спектроскопии)

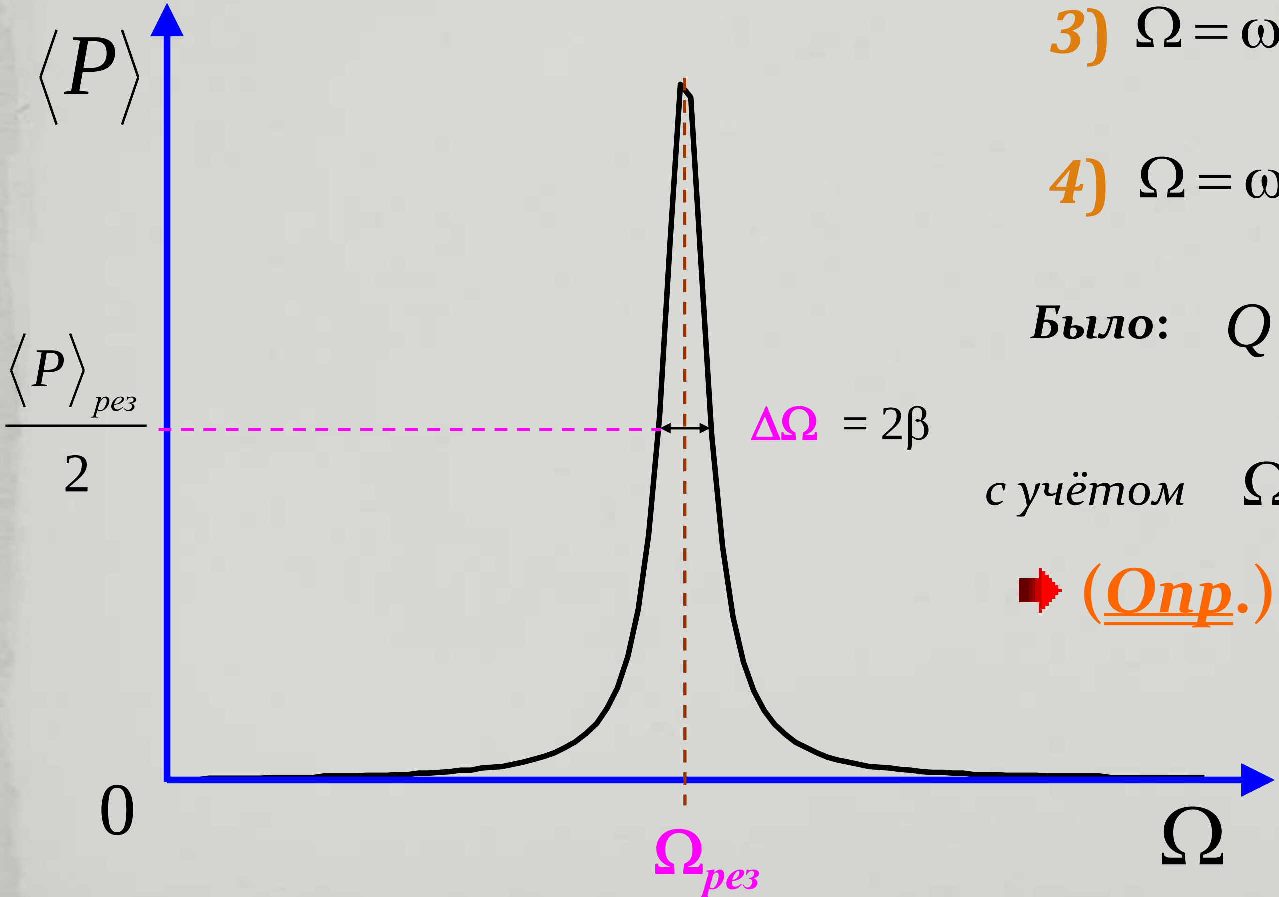
$$\mathcal{R}(\Omega) = \frac{\beta^2}{(\omega_0 - \Omega)^2 + \beta^2}$$

1) $\Omega = \omega_0$, $\mathcal{R}(\Omega) = 1$

2) $\Omega = \omega_0 \pm \beta$, $\mathcal{R}(\Omega) = 0{,}5$

3) $\Omega = \omega_0 \pm 2\beta$, $\mathcal{R}(\Omega) = 0{,}2$

4) $\Omega = \omega_0 \pm 3\beta$, $\mathcal{R}(\Omega) = 0{,}1$



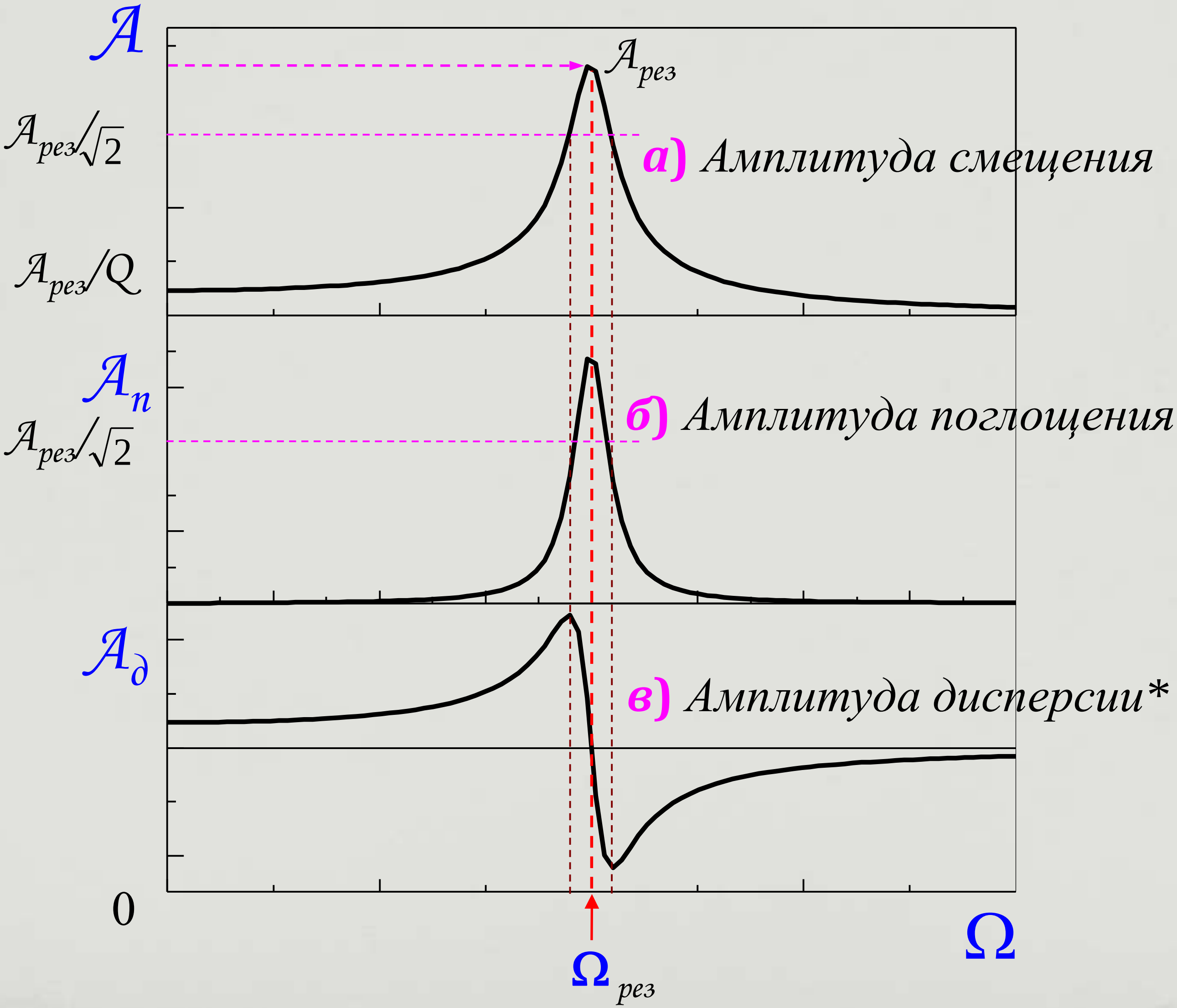
Было: $Q = \dfrac{\omega_0}{2\beta}$

с учётом $\Omega_{рез} \approx \omega_0$ и $2\beta = \Delta\Omega$

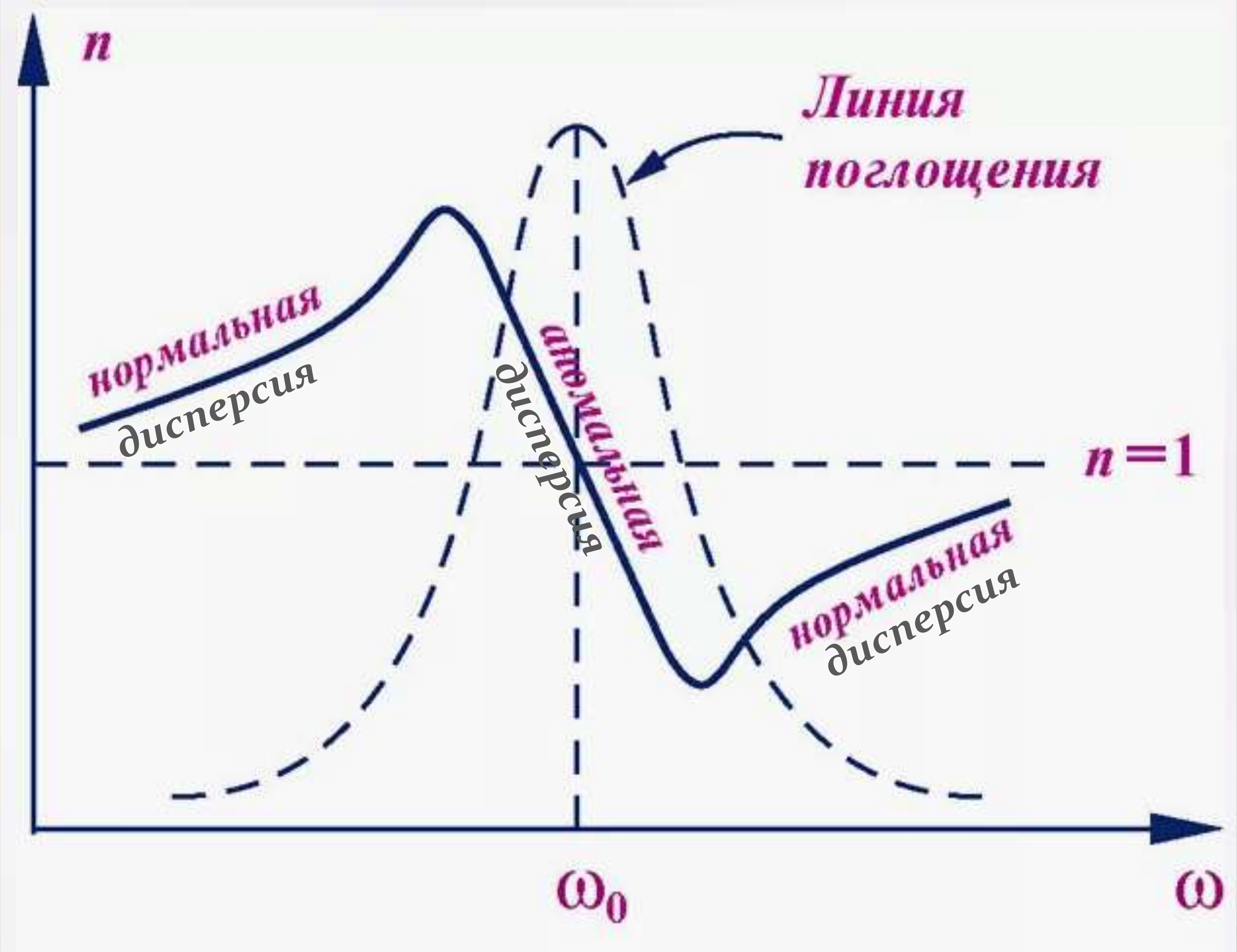
(**Опр.**) ***Добротность***

$$\boxed{Q = \frac{\Omega_{рез}}{\Delta\Omega}}$$

Амплитудные резонансные зависимости



Дисперсионная зависимость показателя преломления от частоты



1.8. Вынужденные колебания в системе связанных осцилляторов

1) ***частоты мод*** $\Rightarrow$ ***резонансные частоты;***

(проявляются в спектрах)

2) ***у мод разная добротность*** $\Rightarrow$ ***… ;***

(ширина линий)

3) ***рост затухания*** $\Rightarrow$ ***…***

(переход линий в полосы, перекрытие, усложнение спектров …)

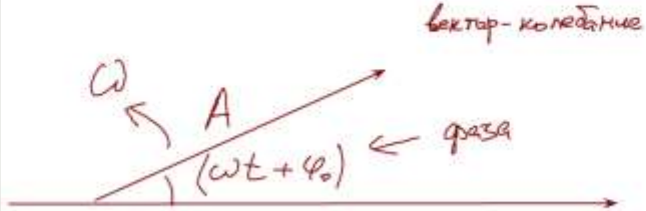
Антракт

- Резонанс бокалов

… и моста Такома ветром

Приложение

Доска 1



$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}}$$

$$f_0^2 = (\omega_0^2-\Omega^2)^2\cdot A^2 + 4\beta^2\Omega^2\cdot A^2$$

$$\boxed{A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}}}$$

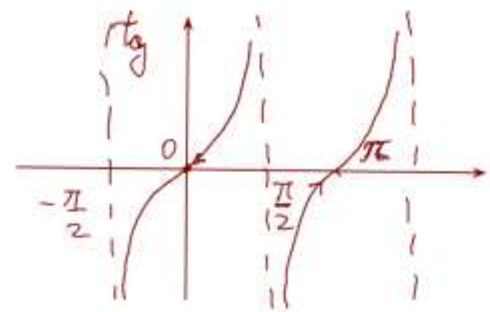
Доска 2

НЧ

1). $\underline{\Omega \ll \omega_0}$

$$A_{\Omega\to 0} = \frac{f_0}{\omega_0^2} - const\ ;$$

$$\operatorname{tg}\alpha \sim \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2} \to 0\ ;$$



$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}} \qquad \sim \frac{2\beta}{-\Omega}$$

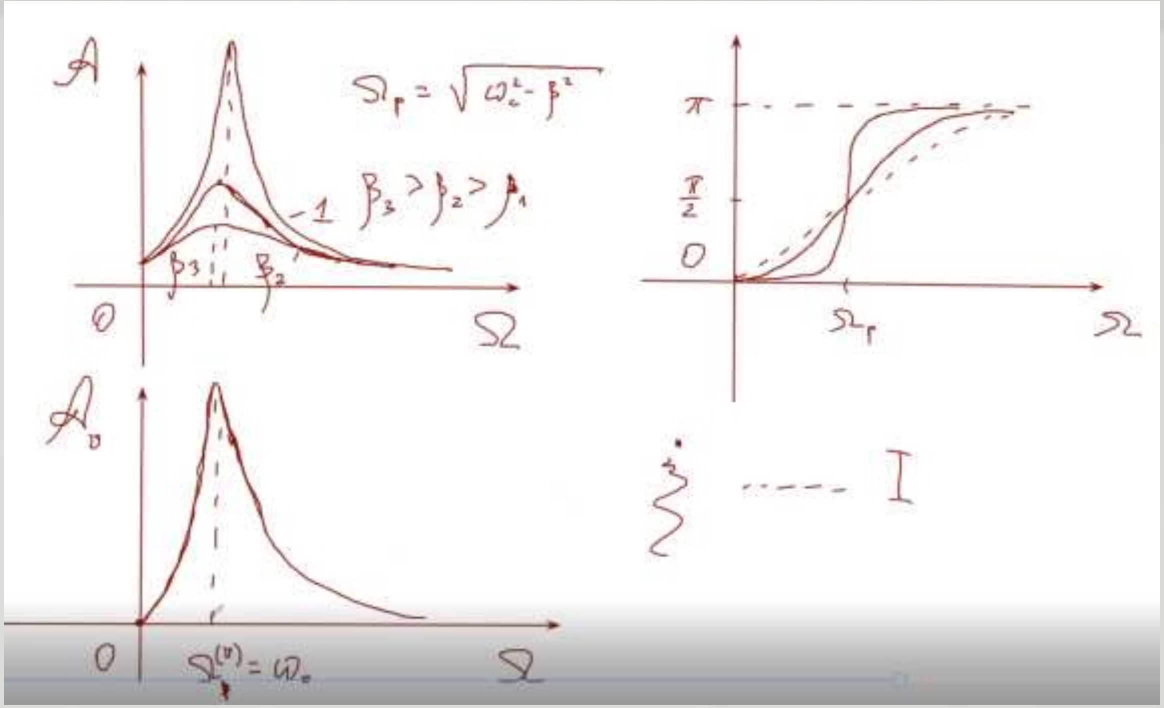
$$\operatorname{tg}\alpha \to -0\,!$$

2) ВЧ

$$\Omega \gg \omega_0\ ; \quad A_{\Omega\to\infty} \sim \frac{f_0}{\Omega^2} \to 0\ ; \quad \alpha - ?$$

Приложение

Доска 3



Доска 4