

# Предисловие

Настоящее учебное пособие написано на основе курса лекций, который один из авторов (П.К. Кашкаров) читает более двадцати лет студентам первого курса химического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Преподавание физики в Московском университете для учащихся указанного факультета осуществляется в течение пяти семестров и включает следующие разделы: «Механика и электричество», «Колебания и волны», «Теоретическая механика», «Основы квантовой механики», «Строение вещества». Эти курсы не только связаны между собой, но и согласованы с необходимыми математическими курсами, читаемыми студентам-химикам, а также с курсами физического содержания, изучаемыми в рамках химического образования. Поэтому в настоящем пособии опущен или изложен в весьма сжатой форме ряд тем по механике и электричеству, которые будут излагаться в последующих курсах (например, «Элементы релятивистской механики», «Электромагнитные явления в веществе»).

Нет необходимости доказывать важность знания физических законов для глубокого понимания химических явлений. Действительно, природа химической связи стала понятна после создания квантовой механики, при анализе химических процессов широко используется термодинамический подход, в экспериментальных исследованиях ученые-химики применяют практически весь арсенал физических методов. Более того, существуют дисциплины, в которых трудно или почти невозможно разделить физическое и химическое содержание (физическая химия, квантовая химия, химическая физика, электрохимия и др.).

Настоящее пособие достаточно лаконично, хотя и содержит весь необходимый для проработки курса материал. Для более углубленного знакомства с курсами «Механика» и «Электричество» можно воспользоваться дополнительной литературой, список которой приведен в конце книги.



# Часть I

## МЕХАНИКА

### ВВЕДЕНИЕ

Раньше других разделов физики сформировалась механика — наука о движении и равновесии тел. Законы механики в наиболее законченном виде были сформулированы Исааком Ньютоном в его основном сочинении «Математические начала натуральной философии» (1687). В своем классическом виде, без изменений механика просуществовала более 200 лет и продемонстрировала свои блестящие возможности при расчете движения тел Солнечной системы. Однако последующие эксперименты показали, что механика Ньютона не применима к телам, движущимся со скоростями, близкими к скорости света, и для систем атомных размеров.

Теория, справедливая при рассмотрении движения тел с любыми скоростями, была создана Альбертом Эйнштейном. Согласно этой теории, скорость тел не может превысить величину, равную скорости света в вакууме ( $c = 2,998 \cdot 10^8$  м/с). В современных ускорителях можно получать протоны, скорости которых на  $10^{-2}\%$  ниже  $c$ . В космических лучах обнаружены протоны со скоростями, лишь на  $10^{-16}\%$  отличающимися от  $c$ . Для тел, движущихся со скоростями, много меньшими  $c$ , уравнения механики Эйнштейна и Ньютона совпадают.

Законы микромира описываются квантовой механикой. В рамках этой теории уже невозможен динамический метод анализа движения тел и применяется статистический, вероятностный подход. Квантовая механика позволила понять такие экспериментально наблюдаемые явления, как стабильность атомов во времени, излучение и поглощение света атомными системами, различие в электрических свойствах металлов и изоляторов, ферромагнетизм ряда материалов и др. Для простейших атомов точность расчета энергетических спектров на основе квантовой теории составляет около  $10^{-3}\%$ . При описании движения макроскопических тел квантовые законы переходят в классические.

Язык физики в целом и механики в частности — это математика. Последняя обеспечивает простоту и компактность описания, необходимую для правильного изложения физических законов и их следствий.

В настоящем пособии будут рассмотрены принципы классической механики.

## § 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

*Кинематика* — раздел механики, изучающий движение тел без анализа причин, обуславливающих это движение. Простейшей моделью физического тела является материальная точка (МТ), которой называют тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи. Только для МТ можно однозначно задать ее координаты и скорость. Очевидно, движение произвольной системы тел можно свести к задаче о движении совокупности материальных точек.

### 1.1. Основные определения

Для описания движения тел в механике вводится ряд понятий.

*Механическая система* — группа тел, выделенных для рассмотрения. *Механическое движение* — это изменение положения тел в пространстве с течением времени. Положение любого тела в пространстве может быть определено только по отношению к какому-либо другому телу — *телу отсчета*. Это приводит к понятию *системы отсчета* — совокупности неподвижных относительно друг друга тел, по отношению к которым рассматривается движение, и инструментов для измерения расстояния и времени. Для количественного описания движения с телами отсчета связывается *система координат*, в простейшем случае — декартова прямоугольная система координат (рис. 1.1).

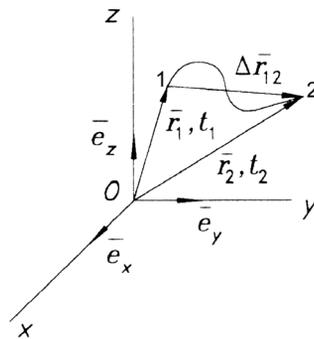


Рис. 1.1

Положение МТ задается радиусом-вектором  $\vec{r}$ , проведенным из начала координат к данной точке, в декартовой системе координат:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z, \quad (1.1)$$

где  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$  — безразмерные единичные векторы-орты;  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — координаты точки.

Основной задачей механики является определение закона движения, то есть зависимости радиуса-вектора МТ от времени.

## 1.2. Линейные характеристики движения

Пусть МТ перемещается из положения 1 в положение 2 (рис. 1.1). Вектор  $\Delta\vec{r}_{12}$ , соединяющий начальную и конечную точки движения, называется *перемещением*. Линия, которую описывает МТ в своем движении, представляет собой *траекторию*. Последняя задается уравнением кривой. Длина участка траектории от начальной до конечной точки движения называется *путем*. Это положительная скалярная величина  $\Delta s_{12}$ , причем  $\Delta s_{12} \geq |\Delta\vec{r}_{12}|$ . Единицей измерения перемещения  $\Delta r_{12}$  и пути  $\Delta s_{12}$  в системе СИ является метр (м).

В общем случае положение МТ описывается тремя независимыми координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , зависящими от времени. При этом говорят, что МТ имеет три степени свободы. Напомним, что минимальное число параметров, задание которых полностью определяет положение механической системы в пространстве, называется числом ее степеней свободы. Если движение происходит по заданной поверхности, то независимых координат остается две, и МТ обладает двумя степенями свободы. При перемещении МТ вдоль известной линии сохраняется лишь одна степень свободы.

Для представления о том, как быстро изменяется пространственное положение МТ со временем, вводится понятие скорости. Вектор, равный отношению перемещения к интервалу времени, за которое оно совершено, называется *средней скоростью*:

$$\vec{V}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}_{12}}{\Delta t_{12}}, \quad (1.2)$$

где  $\Delta t_{12} = t_2 - t_1$  (рис. 1.1).

Часто необходимо знать скорость МТ в данный момент времени в данной точке траектории. Так мы приходим к понятию *мгновенной скорости*. Для ее нахождения точки, для которых определяется вектор перемещения, следует стягивать к одному положению, где и необходимо определить мгновенную скорость (рис. 1.2).

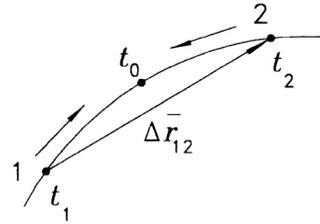


Рис. 1.2

Очевидно,

$$\vec{v}_{\text{МГН}} = \lim_{\Delta t_{12} \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{12}}{\Delta t_{12}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t). \quad (1.3)$$

Для компактного обозначения производных различных физических величин *по времени* используется символ в виде точки. Число точек отражает порядок производной. Мгновенную скорость МТ можно определить как первую производную радиус-вектора по времени.

В декартовой системе координат

$$\vec{v}_{\text{МГН}} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z,$$

где  $v_x = \dot{x}$ ;  $v_y = \dot{y}$ ;  $v_z = \dot{z}$ .

Модуль вектора скорости

$$v_{\text{МГН}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

характеризует изменение пройденного пути со временем:

$$v_{\text{МГН}}(t) = \lim_{\Delta t_{12} \rightarrow 0} \frac{\Delta s_{12}}{\Delta t_{12}} = \dot{s}(t). \quad (1.4)$$

Как следует из определения, вектор скорости МТ всегда направлен по касательной к траектории. Единицей измерения скорости  $v$  в системе СИ является метр в секунду (м/с).

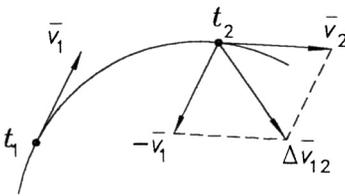
Зная мгновенную скорость как функцию времени, можно найти вектор перемещения МТ:

$$\Delta \vec{r}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}_{\text{МГН}}(t) dt, \quad (1.5)$$

а также изменение координат и пройденный путь:

$$\begin{aligned} \Delta x_{12} &= \int_{t_1}^{t_2} v_x(t) dt, & \Delta y_{12} &= \int_{t_1}^{t_2} v_y(t) dt, & \Delta z_{12} &= \int_{t_1}^{t_2} v_z(t) dt, \\ \Delta s_{12} &= \int_{t_1}^{t_2} v_{\text{МГН}}(t) dt. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Вектор скорости может изменяться со временем. Темп такого изменения описывается вектором ускорения.



Если  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  — скорости МТ в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  (рис. 1.3), то средним ускорением называется вектор

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{v}_{12}}{\Delta t_{12}}, \quad (1.7)$$

Рис. 1.3

где  $\Delta \vec{v}_{12} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ .

Мгновенное ускорение определяется посредством предельного перехода:

$$\vec{a}_{\text{МГН}} = \lim_{\Delta t_{12} \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_{12}}{\Delta t_{12}} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t), \quad (1.8)$$

модуль вектора ускорения

$$a_{\text{МГН}}(t) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

где  $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$ ,  $a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$ ,  $a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$ .

Единицей измерения ускорения  $a$  в системе СИ является метр на секунду в квадрате ( $\text{м}/\text{с}^2$ ).

Зная функцию  $\vec{a}_{\text{МГН}}(t)$ , можно найти изменение вектора скорости за промежуток времени между  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\Delta \vec{v}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}_{\text{МГН}}(t) dt. \quad (1.9)$$

Если известны начальные положение, скорость МТ ( $\vec{r}(0)$  и  $\vec{v}(0)$ ) и функция  $\vec{a}_{\text{МГН}}(t)$ , то

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\text{МГН}}(t) &= \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}_{\text{МГН}}(t') dt', \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}_{\text{МГН}}(t') dt'.\end{aligned}\quad (1.10)$$

Таким образом, решение основной задачи механики сводится к отысканию вектора ускорения МТ для произвольных моментов времени. Это делается с использованием законов динамики и будет обсуждаться в соответствующем разделе курса.

Ниже для компактности записи формул мы будем опускать индекс у векторов мгновенных скорости и ускорения, то есть будем писать  $\vec{V}(t)$  и  $\vec{a}(t)$ . Для средних величин индексы будут, конечно, сохранены.

Как видно из рис. 1.4, вектор ускорения в общем случае составляет некоторый угол с касательной к траектории в данной точке. При криволинейном движении в плоскости оказывается удобным разложить вектор  $\vec{a}$  на две составляющие — касательную к траектории в данной точке  $\vec{a}_\tau$  и перпендикулярную к касательной  $\vec{a}_n$  (рис. 1.4):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Величины  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{a}_n$  называют *тангенциальным* и *нормальным* ускорениями соответственно.

Легко показать, что тангенциальное ускорение характеризует изменение вектора скорости только по величине, а нормальное — только по направлению.

Пусть движение происходит при  $\vec{a}_\tau = 0$ . Тогда изменение скорости за малое время  $dt$  равно (рис. 1.5)

$$\vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t) = \vec{a}_n dt = d\vec{v}_n.$$

Отсюда квадрат модуля скорости в момент времени  $t + dt$

$$v^2(t + dt) = v^2(t) + (d\vec{v}_n)^2 \approx v^2(t)$$

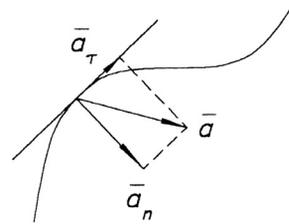


Рис. 1.4

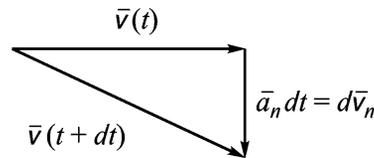


Рис. 1.5

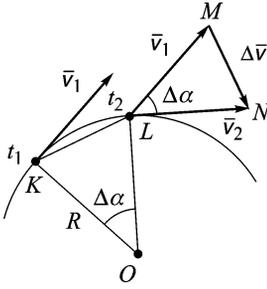


Рис. 1.6

с точностью до бесконечно малых второго порядка. То есть наличие только нормальной компоненты ускорения у МТ не изменяет модуля ее скорости. Очевидно, при этом меняется направление вектора  $\vec{v}$ . Можно связать величину  $a_n$  со значением мгновенной скорости и характеристикой траектории. Для простоты будем считать, что МТ движется равномерно по окружности радиуса  $R$ . Рассмотрим два последовательных положения МТ,

разделенных малым интервалом времени  $\Delta t$  (рис. 1.6).

Легко видеть, что треугольники  $\Delta KOL$  и  $\Delta MLN$  подобны как равнобедренные с равными углами при вершинах  $O$  и  $L$ . Отсюда

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{v} = \frac{KL}{R}.$$

Так как  $\Delta \alpha \ll 1$ , хорда  $KL \approx$  дуге  $KL = v \Delta t$ . Следовательно,

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{v} = \frac{v \cdot \Delta t}{R} \quad \text{и} \quad a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}.$$

Если движение МТ происходит не по окружности, то под  $R$  подразумевается радиус кривизны  $R_{кр}$  траектории.

Итак,

$$a_n = \frac{v^2}{R_{кр}}; \quad a_\tau = \dot{v};$$

$$a = \sqrt{\frac{v^4}{R_{кр}^2} + (\dot{v})^2}. \quad (1.11)$$

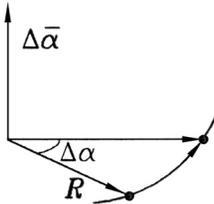


Рис. 1.7

### 1.3. Угловые характеристики движения

Описание движения МТ по окружности существенно упрощается при введении понятий угловых перемещения, скорости и ускорения.

Пусть МТ совершает поворот в плоскости на малый угол  $\Delta \alpha$  (рис. 1.7).

Малым угловым перемещением МТ назовем вектор  $\Delta\vec{\alpha}$ , равный по величине углу поворота радиуса, проведенного от оси вращения к этой точке, и направленный вдоль указанной оси по правилу правого винта. При этом предполагается, что  $\Delta\alpha$  измеряется в радианах. Введенная величина действительно будет вектором, если для двух последовательных малых поворотов результирующее угловое перемещение будет находиться по правилу сложения векторов. Покажем, что это действительно так.

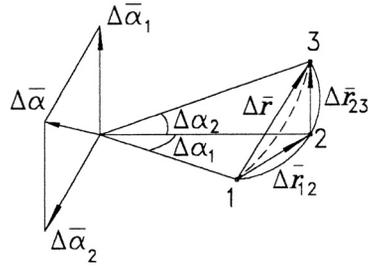


Рис. 1.8

Пусть МТ совершает последовательно малые повороты в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 1.8), причем  $\Delta\vec{r}_{12}$  и  $\Delta\vec{r}_{23}$  — соответствующие перемещения.

Треугольник 123 прямоугольный по условию, и, следовательно, результирующее перемещение

$$(\Delta\vec{r})^2 = (\Delta\vec{r}_{12})^2 + (\Delta\vec{r}_{23})^2. \quad (1.12)$$

Обозначим символами  $\Delta s_{12}$ ,  $\Delta s_{23}$  и  $\Delta s$  дуги, по которым совершались первое, второе и результирующее перемещения. При условии

$$\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2 \ll 1$$

$$\Delta r \approx \Delta s; \Delta r_{12} \approx \Delta s_{12} \text{ и } \Delta r_{23} \approx \Delta s_{23}.$$

Тогда соотношение (1.12) можно записать и для соответствующих дуг:

$$(\Delta s)^2 \approx (\Delta s_{12})^2 + (\Delta s_{23})^2.$$

После деления на квадрат радиуса поворота получаем

$$\left(\frac{\Delta s}{R}\right)^2 \approx \left(\frac{\Delta s_{12}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta s_{23}}{R}\right)^2.$$

Это, по определению радианной меры угла, соответствует

$$(\Delta\alpha)^2 \approx (\Delta\alpha_{12})^2 + (\Delta\alpha_{23})^2, \quad (1.13)$$

что и доказывает векторный характер введенного углового перемещения. Следует еще раз подчеркнуть, что приведенные рас-

суждения справедливы лишь для малых углов  $\Delta\alpha_1$  и  $\Delta\alpha_2$ . В противном случае соотношение (1.13) не выполняется.

*Угловую скорость* определим как первую производную по времени углового перемещения:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}. \quad (1.14)$$

Очевидно, что в общем случае нельзя ввести вектор средней угловой скорости, ибо конечное угловое перемещение  $\alpha_1 - \alpha_2$  не обладает свойствами вектора. Однако среднее значение модуля угловой скорости может быть определено как

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1}, \quad (1.15)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — углы поворота, отсчитанные от одного выбранного направления.

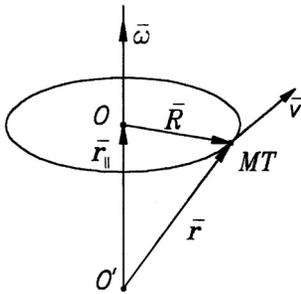


Рис. 1.9

Полезно связать векторы угловой и линейной скоростей для случая движения МТ по окружности (рис. 1.9). Соотношение для модулей  $\omega$  и  $v$  следует из определения радианной меры угла. Действительно, при повороте на угол  $\Delta\alpha$  описывается дуга  $\Delta s = \Delta\alpha \cdot R$ . Поделив это выражение на время поворота  $\Delta t$ , получаем

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = R \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \quad \text{или} \quad v = R\omega. \quad (1.16)$$

Если провести радиус-вектор  $\vec{R}$  от центра окружности к МТ, то выражение (1.16) может быть записано в векторном виде:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{R}]. \quad (1.17)$$

Очевидно, что величина  $\vec{v}$  не зависит от выбора точки на оси, из которой проводится радиус-вектор. Сместим начало вектора в точку  $O'$ :

$$[\vec{\omega} \vec{r}] = [\vec{\omega} \vec{r}_{\parallel}] + [\vec{\omega} \vec{R}]. \quad (1.18)$$

Так как в первом слагаемом правой части (1.18) перемножаются параллельные векторы, то оно равно нулю. Следовательно,

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}]. \quad (1.19)$$

Из рис. 1.9 также можно видеть, что

$$\vec{\omega} = \frac{[\vec{R} \vec{v}]}{R^2}. \quad (1.20)$$

Угловое ускорение определим как первую производную по времени от вектора угловой скорости:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\alpha}}{dt^2}. \quad (1.21)$$

Как и любые другие векторы, векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\beta}$  могут быть спроецированы на оси выбранной системы координат. Тогда выражение (1.21) можно представить следующим образом:

$$\beta_x = \frac{d\omega_x}{dt} = \dot{\omega}_x; \quad \beta_y = \frac{d\omega_y}{dt} = \dot{\omega}_y; \quad \beta_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \dot{\omega}_z,$$

где  $\omega_x = \frac{d\alpha_x}{dt}$ ;  $\omega_y = \frac{d\alpha_y}{dt}$ ;  $\omega_z = \frac{d\alpha_z}{dt}$ .

Зная угловое ускорение как функцию времени, можно найти изменение угловой скорости:

$$\Delta\vec{\omega}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\beta}(t) dt. \quad (1.22)$$

Если поворот происходит в одной плоскости, то можно определить скалярную величину — угол поворота МТ:

$$\Delta\alpha_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t) dt. \quad (1.23)$$

Единицей измерения угловой скорости  $\omega$  является радиан в секунду (рад/с), а углового ускорения  $\beta$  — радиан на секунду в квадрате (рад/с<sup>2</sup>).

В заключение этого раздела приведем соотношения, связывающие векторы  $\vec{a}_n$  и  $\vec{a}_\tau$  с угловыми характеристиками движения:

$$\begin{aligned} \vec{a}_n &= -\omega^2 \vec{R}; \\ \vec{a}_\tau &= [\vec{\beta} \vec{R}]; \\ a &= R\sqrt{\omega^4 + \beta^2}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

### 1.4. Преобразование линейных характеристик движения

Рассмотрим движение МТ относительно двух различных систем отсчета. Пусть первая система ( $Oxyz$ ) условно считается неподвижной, а вторая ( $O'x'y'z'$ ) движется относительно первой поступательно со скоростью  $\vec{v}_0$  (рис. 1.10).

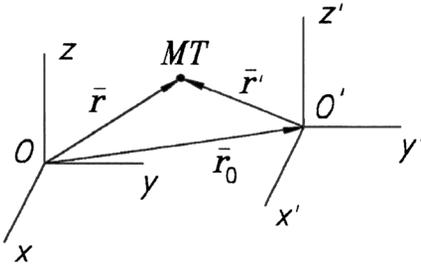


Рис. 1.10

Радиус-вектор  $\vec{r}$ , определяющий положение МТ в системе  $Oxyz$ , может быть выражен через положение МТ в системе ( $O'x'y'z'$ ) и положение точки  $O'$  относительно точки  $O$ :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'. \quad (1.25)$$

Если предположить, что время в обеих системах течет одинаково, то есть  $t = t'$ , то после дифференцирования (1.25) получаем

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'. \quad (1.26)$$

Принято называть векторы  $\vec{v}$ ,  $\vec{v}_0$  и  $\vec{v}'$  абсолютной, переносной и относительной скоростями соответственно. Предположение о совпадении временных шкал и неизменности длин отрезков справедливо лишь в случае малых значений скоростей  $\vec{v}_0$  и  $\vec{v}'$  по сравнению со скоростью света в вакууме  $c$ . В противном случае вместо (1.26) связь между скоростями будет описываться выражением, получаемым в специальной теории относительности.

Формулу (1.26) с учетом вышесказанного также можно продифференцировать и получить связь между ускорениями:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}', \quad (1.27)$$

где обозначения имеют тот же смысл, что и в (1.25) и (1.26).

Приведенные соотношения (1.25)–(1.27) свидетельствуют, что кинематически все системы отсчета эквивалентны. Зная параметры относительного движения систем отсчета, легко связать координаты, скорости и ускорения МТ для этих систем.

## § 2. КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

В разделе 1.3 мы анализировали вращение МТ вокруг оси. Термин «материальная точка» в данном случае означает, что размеры тела существенно меньше радиуса вращения  $R$ . Только в этом случае все точки этого тела имеют равные линейные скорости. Однако если размеры тела сопоставимы с  $R$  (рис. 2.1), то точки, отстоящие от оси на различные расстояния, имеют разные линейные скорости:

$$\vec{v}_i = [\vec{\omega} \vec{R}_i].$$

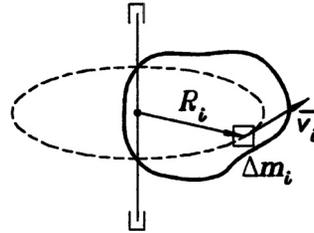


Рис. 2.1

Такое движение нельзя свести к движению одной МТ, и модель требует усложнения. Мы вынуждены рассматривать совокупность МТ, образующих данное тело. Хотя реальные тела подвержены деформациям, будем считать, что расстояния между физически малыми его частями не меняются в процессе движения. Так мы приходим к понятию *абсолютно твердого тела* (в дальнейшем для краткости просто *твердого тела* или *ТТ*).

### 2.1. Описание движения твердого тела

Положение ТТ в пространстве можно полностью определить, задав координаты трех не совпадающих друг с другом и не лежащих на одной прямой точек, то есть задав положение треугольника (рис. 2.2). Положение точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  фиксируется девятью координатами. Однако эти координаты не независимы и связаны тремя уравнениями для длин сторон  $\triangle ABC$ . В итоге необходимо использовать шесть независимых координат, следовательно, незакрепленное ТТ обладает шестью степенями свободы.

Описание общего случая движения ТТ достаточно сложно, и мы проанализируем ряд частных, но важных примеров.

Простейшим типом движения ТТ является *поступательное*. При этом

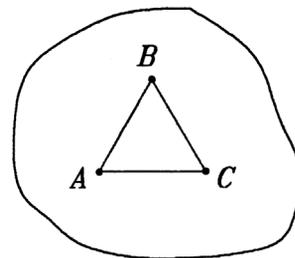


Рис. 2.2

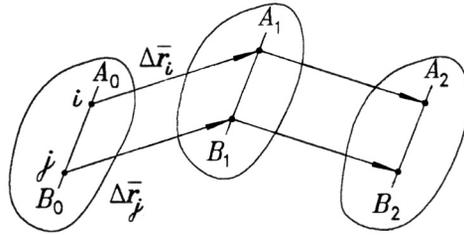


Рис. 2.3

каждая прямая, связанная жестко с ТТ, движется параллельно самой себе (рис. 2.3).

Из рис. 2.3 видно, что любые две выделенные точки ТТ  $i$  и  $j$  совершают одинаковые перемещения ( $\Delta \vec{r}_i = \Delta \vec{r}_j$ ), имеют одинаковые скорости и ускорения. Очевидно, при описании такое движение ТТ можно свести к движению одной материальной точки, выбрав в качестве нее любую точку, жестко связанную с телом. Как и для свободной МТ, такое движение характеризуется тремя степенями свободы.

Другим частным случаем движения ТТ является вращение вокруг неподвижной оси. Вращением ТТ называется движение, при котором все точки ТТ движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения. Этот случай мы рассмотрели в начале настоящего параграфа. Описать такое движение можно всего лишь одной координатой, задав угол поворота ТТ относительно фиксированного направления.

## 2.2. Плоское движение твердого тела

При *плоском* движении все точки ТТ движутся в параллельных плоскостях. Пусть  $\Delta ABC$ , изображенный на рис. 2.2, лежит в одной из таких плоскостей. Тогда достаточно следить за движением одной из его сторон, например  $AB$ . В заданной плоскости положение точек  $A$  и  $B$  определяется четырьмя координатами, которые связаны одним уравнением, выражающим длину отрезка  $AB$ . В итоге необходимо использовать 3 независимые координаты, и движение будет обладать тремя степенями свободы.

Рассмотрим два последовательных положения ТТ, разделенных малым промежутком времени  $dt$  (рис. 2.4).

Индексы  $O$  и  $K$  на рис. 2.4 означают начальное и конечное положения ТТ соответственно. Легко видеть, что переход между указанными положениями можно осуществить комбинируя поступательное движение тела и его поворот вокруг оси, перпендикулярной плоскостям, в которых перемещаются точки ТТ. Действительно, пусть отрезок  $A_1B_1$  характеризует положение ТТ

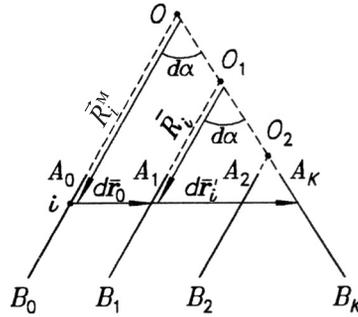


Рис. 2.4

после совершения всеми его точками одинакового перемещения  $d\vec{r}_0$ . Совместить отрезки  $A_1B_1$  и  $A_KB_K$  можно теперь поворотом  $A_1B_1$  вокруг оси, проходящей через точку  $O_1$ . Хотя точка  $i$  при этом движется по дуге, с учетом малости угла поворота  $d\alpha$  можно считать ее движение прямолинейным и характеризовать вектором  $d\vec{r}'_i$  (он различен для разных точек ТТ). Очевидно, что число разбиений плоского движения на поступательное и вращательное бесконечно. В частности, поступательно можно сместить тело до положения  $A_2B_2$  и затем повернуть вокруг оси, проходящей через точку  $O_2$  (рис. 2.4). При вариациях указанных разбиений изменяются векторы  $d\vec{r}_0$ ,  $d\vec{r}'_i$ , но угол поворота остается одним и тем же (рис. 2.4).

Таким образом, результирующее перемещение точки  $i$  тела при плоском движении может быть представлено в виде

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_0 + d\vec{r}'_i. \tag{2.1}$$

Скорость этой точки

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{v}'_i. \tag{2.2}$$

Последнее слагаемое в правой части (2.2) представляет линейную скорость точки при вращении:

$$\vec{v}'_i = [\vec{\omega} \vec{R}_i],$$

где  $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}$  — угловая скорость.

Тогда

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \vec{R}_i]. \tag{2.3}$$

Так как угол поворота не зависит от положения оси поворота, то и угловая скорость одинакова при любом положении оси.

В соответствии с введенной ранее терминологией можно назвать вектор  $\vec{V}_i$  абсолютной скоростью точки  $i$  ТТ,  $\vec{V}_0$  — переносной,  $[\vec{\omega} \vec{R}_i]$  — относительной. Ось поворота движется в пространстве поступательно со скоростью  $\vec{V}_0$ . Она меняет свое положение и относительно тела. Из рис. 2.4 видно, что совместить отрезки  $A_0B_0$  и  $A_KB_K$  можно также только за счет поворота вокруг оси, проходящей через точку  $O$ . В этом случае скорость поступательного движения оси в каждый момент времени равна нулю ( $\vec{V}_0 = 0$ ). Такая ось называется *мгновенной осью вращения*. В каждый последующий момент времени она занимает новое положение как в пространстве, так и относительно тела. Скорость точки  $i$  ТТ может быть записана в этом случае как

$$\vec{V}_i = [\vec{\omega} \vec{R}_i^M]. \quad (2.4)$$

Приведем пример, иллюстрирующий рассмотренные выше представления. Пусть на тележке (рис. 2.5), перемещающейся по плоскости со скоростью  $\vec{V}_0$ , установлен диск, который может вращаться вокруг оси  $O$  с угловой скоростью  $\omega$ . Будем следить за скоростями движения точек на вертикальном диаметре диска. Если  $\vec{V}_0 = 0$ , то происходит только вращение диска вокруг неподвижной оси. Распределение скоростей точек на диаметре дано на рис. 2.5, *а*. Очевидно, что в этом случае ось вращения диска и мгновенная ось совпадают.

Теперь будем считать, что тележка движется вправо со скоростью  $\vec{V}_0$  (рис. 2.5, *б*). Скорости точек относительно неподвижной поверхности уже складываются из двух компонент в соответствии с формулой (2.3). Очевидно, скорость точек, со-

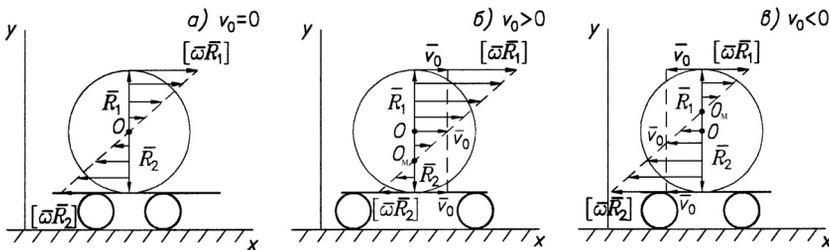


Рис. 2.5

впадающих с  $O_M$ , равна нулю. Через точку  $O_M$  проходит мгновенная ось вращения. Она расположена ниже оси, на которой закреплен диск. При выполнении условия  $v_0 = \omega R$  точка  $O_M$  смещается на нижний край диаметра. Такой случай реализуется при качении ТТ по поверхности без проскальзывания. Наконец рассмотрим ситуацию, когда тележка движется против оси  $x$  (рис. 2.5, в). Как видно из рис. 2.5, в, точка  $O_M$  находится выше оси закрепления диска.

### § 3. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

*Динамика* — раздел механики, изучающий движение тел в связи с действующими на них *силами*. *Сила, действующая на тело, является мерой взаимодействия его с окружающими телами и полями*. Законы динамики носят имя *И. Ньютона*. Они были сформулированы им, как уже отмечалось во введении, в известном труде «Математические начала натуральной философии», опубликованном в 1687 г. Хотя, по признанию самого Ньютона, в определенной степени эти законы были известны и до него, однако до Ньютона не было представления о том, что эти *три закона* являются основой *всей механики*. Только он, исследуя и анализируя движение всевозможных тел, указал, что все сколь угодно сложные механические явления подчинены трем законам динамики. Именно он построил на фундаменте этих законов стройное здание механики как *научной дисциплины*. Мы обязательно процитируем формулировки законов, данные Ньютоном. Очень важно понимать, что законы Ньютона, как и другие принципы, лежащие в основе физики, являются обобщением опытных данных. Это взаимосвязанная система законов, и опытной проверке подвергается не каждый закон в отдельности, а вся система в целом.

#### 3.1. Первый закон Ньютона

При формулировке первого закона Ньютон использовал *закон инерции*, открытый еще Галилеем. Согласно этому закону, *тело (МТ), не подверженное внешним воздействиям, либо находится в состоянии покоя, либо движется равномерно и прямолинейно*. Такое тело называется свободным, а его движение — движением по инерции. Нужно понимать, что это — движение

не вследствие инерции: инерция — это естественное состояние свободного тела. Конечно, свободное тело — это абстракция. И не существует способов действительно убедиться в полном отсутствии воздействия других тел на данное.

Если в кинематике все системы отсчета были эквивалентны, то закон инерции свидетельствует о том, что для динамики эквивалентны только определенные системы.

Действительно, пусть какое-либо свободное тело в некоторой системе отсчета движется равномерно и прямолинейно. Однако в другой системе, движущейся с ускорением по отношению к первой, и тело движется с ускорением, то есть первый закон Ньютона не выполняется. Таким образом, *первый закон Ньютона*, по сути, постулирует, что существуют системы отсчета, в которых все свободные тела движутся равномерно и прямолинейно. Такие системы называются *инерциальными системами отсчета*.

Очевидно, что любая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно по отношению к инерциальной, будет также инерциальной. То есть инерциальных систем бесконечное множество. Вместе с тем система отсчета, движущаяся с ускорением по отношению к инерциальной, является неинерциальной; и для нее законы динамики Ньютона не выполняются.

Какие же системы отсчета можно считать инерциальными? Установилось соглашение говорить о системе, связанной с *неподвижными звездами*, как о *стандартной* системе отсчета, не имеющей ускорения. Однако экспериментально доказать, что неподвижные звезды абсолютно не имеют ускорения, нельзя. Но если оно и есть, то столь мало, что его невозможно зафиксировать существующими методами.

В качестве одной из звезд можно выбрать Солнце и поместить в его центр масс начало отсчета, а оси направить на три удаленные звезды. Это — гелиоцентрическая система отсчета Коперника. Ее инерциальность следует из очень хорошего совпадения расчетов на основе законов динамики движения планет Солнечной системы и астрономических наблюдений, а также из опыта с маятником Фуко.

Мы на практике имеем дело с движениями, происходящими на Земле. Что можно сказать о системе отсчета, связанной с нашей планетой? Очевидно, что точки на поверхности Земли движутся с ускорением — вращаются вследствие суточного движения Земли и вместе с Землей вращаются вокруг Солнца.

Неинерциальность такой системы доказывается опытным путем (маятник Фуко). Каковы же ускорения такой системы? Точка на экваторе за счет суточного вращения Земли имеет ускорение

$$a_n = \omega_{\text{сут}}^2 \cdot R_3 \approx 0,034 \text{ м/с}^2 \approx \frac{g}{300}.$$

Ускорение за счет вращения вокруг Солнца еще меньше:

$$a_n = \omega_{\text{год}}^2 \cdot R_{\text{орб}} \approx 0,006 \text{ м/с}^2.$$

Обычные грубые опыты не позволяют зафиксировать такие ускорения, и во многих случаях систему отсчета, связанную с Землей, можно считать инерциальной. Таким образом, в тех случаях, когда ускорения, получаемые телами задачи, много больше этих величин, указанную систему отсчета можно считать инерциальной.

### 3.2. Второй закон Ньютона

Если тело *не свободно*, то есть взаимодействует с другими телами (непосредственно или через поля, см. § 10), то изменение скорости тела описывается вторым законом Ньютона. Прежде чем его сформулировать, следуя Ньютону, введем понятие импульса  $MT$ , определив его как произведение массы  $MT$   $m$  на ее скорость  $\vec{V}$ :

$$\vec{p} = m\vec{V}. \quad (3.1)$$

Единицей измерения импульса  $p$  является килограмм-метр в секунду (кг·м/с).

Отметим, что *массу* тела Ньютон определил как *количество материи*, пропорциональное ее плотности и объему. Пока мы сохраним такой смысл этого понятия.

Ньютон сформулировал второй закон следующим образом: «Скорость изменения импульса тела ( $MT$ ) пропорциональна приложенной силе и происходит по направлению действия силы». (Здесь мы лишь заменили устаревший термин «количество движения» на импульс). Итак,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (3.2)$$

Единицей измерения силы  $F$  в системе СИ является ньютон ( $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}^2$ ).

Если на тело действуют несколько сил, то под  $\vec{F}$  подразумевается их результирующая (то есть векторная сумма сил).

Если мы рассматриваем движение с малыми скоростями  $V \ll c$ , то  $m$  не зависит от скорости:  $m = m_0$  — масса покоя. Кроме того, пусть в процессе движения величина  $m$  не изменяется за счет отделения частей тела. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &\equiv \frac{d(m\vec{V})}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a}; \\ m\vec{a} &= \vec{F}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Второй закон Ньютона, очевидно, справедлив только в *инерциальной системе отсчета* (ибо при  $\vec{F} = 0$  он должен перейти в первый закон). Поэтому для случая постоянной массы можно дать формулировку, учитывающую это обстоятельство.

*В инерциальной системе отсчета произведение массы материальной точки на ее ускорение равно величине действующей на нее силы. Направления силы и ускорения совпадают.* В декартовых координатах выражение (3.3) принимает вид

$$ma_x = F_x, \quad ma_y = F_y, \quad ma_z = F_z.$$

Уравнение (3.3), описывающее второй закон Ньютона, называют также *уравнением движения* МТ.

В приведенном законе масса выступает как мера *инертности тела*, характеризующая сопротивление тела изменению его скорости. Из опытов видно, что введенная таким образом *инертная масса* пропорциональна количеству вещества в теле.

Можно некоторую массу принять за эталон инертной массы, например 1 кг. Тогда, производя ускорение эталонного и некоторого другого тела одной силой (ее можно измерить динамометром), мы по величинам ускорений можем определить инертную массу неизвестного тела:

$$\begin{aligned} F_0 &= m_{\text{эт}} a_{\text{эт}} = m_x a_x, \\ m_x &= m_{\text{эт}} \frac{a_{\text{эт}}}{a_x}. \end{aligned}$$

Прямыми опытами, изменяя ориентацию ускоряемого тела, можно показать, что инертная масса — *скалярная величина* (при  $V \ll c$ ).

### 3.3. Третий закон Ньютона

В первом и втором законе Ньютона речь идет только о силах, действующих на данное тело, хотя мы всегда имеем дело с взаимодействием по крайней мере двух тел. Роль этого второго тела отражена третьим законом, который, по существу, неотделим от первых двух.

Ньютон сформулировал этот закон так: *«Действию всегда есть равное и противоположное противодействие»*. В более современной трактовке закон звучит следующим образом: *«Силы взаимодействия двух МТ равны по величине, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки»*.

Очевидно, что по природе действие ничем не отличается от противодействия. Если действующая сила обусловлена гравитационным полем, то и противодействующая сила имеет такую же природу и т.д.

Для обозначения сил взаимодействия мы будем использовать два индекса —  $\vec{F}_{ij}$ , где  $i$  — номер тела, на которое действует сила, а  $j$  — номер тела, со стороны которого действует сила. В этих обозначениях третий закон может быть записан как

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (3.4)$$

Равенство (3.4) относится к взаимодействию двух тел. А если мы имеем систему из  $\mathcal{N}$  материальных точек? Можно ввести понятие *парного* взаимодействия  $i$  и  $j$  точек и распространить третий закон на случай такого взаимодействия. Тогда

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \quad (3.4a)$$

Следует отметить, что третий закон Ньютона строго справедлив при контактном взаимодействии. Если МТ взаимодействуют посредством полей, то ввиду конечной скорости распространения взаимодействий ( $\sim c$ ) при быстром смещении одной частицы сила, действующая на нее, изменится, но для второй частицы изменение взаимодействия скажется только через время  $\tau = \Delta r_{12}/c$ , и в течение этого времени нарушится равенство сил действия и противодействия. Это релятивистский эффект.

### 3.4. Типы сил в механике

При анализе движения тел с помощью законов динамики приходится иметь дело с различными типами сил. Для многих из них известны законы, определяющие зависимость взаимодействия от расстояния и характеристик тел. Рассмотрим такие силы.

1. *Силы всемирного тяготения* подчиняются открытому Ньютоном закону: две МТ притягиваются с силами, пропорциональными произведению их масс ( $m_1$  и  $m_2$ ) и обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними ( $r_{12}$ ). Силы направлены вдоль прямой, соединяющей МТ. Математическая запись этого закона для силы, действующей на первое тело со стороны второго, имеет следующий вид:

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \quad (3.5)$$

где  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2$  — коэффициент пропорциональности при условии, что массы и расстояние выражаются в единицах СИ. В рассматриваемом законе массы  $m_1$  и  $m_2$  являются мерой гравитационного взаимодействия между МТ и в классической механике непосредственно не связаны с введенными ранее инертными массами. Однако опыт показывает, что с весьма высокой степенью точности гравитационная и инертная массы тела пропорциональны друг другу. Гравитационная постоянная  $G$  выбирается так, чтобы указанные массы были равны.

При рассмотрении движения тел вблизи поверхности Земли величина силы тяготения может быть выражена следующим образом:

$$F_{12} = G \frac{mM}{(R_3 + h)^2} \approx G \frac{mM}{R_3^2} = mg, \quad (3.6)$$

где  $g = G \frac{M}{R_3^2}$  — ускорение свободного падения,  $R_3$  — радиус Земли,  $h$  — высота тела над поверхностью Земли.

2. *Упругие* силы возникают при деформации тел. Мы будем анализировать тело в виде спиральной пружины. Для него в достаточно широком интервале деформаций выполняется *закон Гука*:

$$F_{\text{упр}} = -k \cdot |l - l_0|, \quad (3.7)$$

где  $|l - l_0|$  — абсолютная величина деформации пружины,  $k$  — коэффициент упругости. Сила всегда направлена противоположно направлению деформации.

3. *Электромагнитные* силы возникают при взаимодействии электрически заряженных частиц (МТ) друг с другом или с электрическими и магнитными полями. Для двух неподвижных заряженных МТ (точечных зарядов) в вакууме справедлив *закон Кулона*:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \quad (3.8)$$

то есть сила, действующая между двумя точечными зарядами в вакууме, пропорциональна величине зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по прямой, соединяющей заряды. Одноименные заряды отталкиваются, разноименные — притягиваются.

При движении точечного заряда в электрическом и магнитном полях на него действует *обобщенная сила Лоренца*:

$$\vec{F}_Л = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}], \quad (3.9)$$

где  $\vec{E}$  — вектор напряженности электрического, а  $\vec{B}$  — вектор индукции магнитного поля,  $\vec{v}$  — скорость частицы.

4. При движении тела испытывают, как правило, действие *сил трения*. Если происходит скольжение одного твердого тела по поверхности другого, то реализуется случай так называемого *сухого трения скольжения*, и его сила в первом приближении не зависит от величины скорости:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\mu F_p \frac{\vec{v}}{v}, \quad (3.10)$$

где  $\vec{v}$  — скорость относительного движения тел,  $F_p$  — сила реакции опоры,  $\mu$  — коэффициент трения.

В условиях, когда на твердое тело, соприкасающееся с некоторой поверхностью другого твердого тела, действуют силы, но оно не движется относительно этой поверхности, со стороны последней на тело действует *сила трения покоя*. Ее величина находится из условия отсутствия движения:

$$\vec{F}_{\text{тр}} + \sum_i \vec{F}_i = 0, \quad (3.11)$$

где  $\vec{F}_i$  — силы, приложенные к телу, за исключением  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . Очевидно, что модуль силы трения покоя может принимать любые значения из интервала  $0 \div \mu F_p$  в соответствии с соотношением (3.11).

При перемещении МТ в жидких или газообразных средах возникает так называемая *сила вязкого трения*. Она пропорциональна скорости движения тела относительно среды  $\vec{V}$ :

$$\vec{F}_{\text{тр}}^{\text{вязк}} = -\varepsilon \vec{V}, \quad (3.12)$$

где  $\varepsilon$  — коэффициент пропорциональности. Отметим, что в этом случае не существует силы трения покоя.

### 3.5. Принцип относительности Галилея

На основе рассмотрения законов Ньютона можно сделать вывод, что понятие абсолютной скорости тел (см. разд. 1.4) *не имеет смысла*. Все системы, движущиеся равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы отсчета, тоже инерциальны и *динамически эквивалентны*. Последнее означает, что никакими механическими опытами, поставленными в пределах данной инерциальной системы отсчета, невозможно установить, движется ли эта система отсчета прямолинейно и равномерно или находится в состоянии покоя. Так мы приходим к *принципу относительности Галилея: основные законы механики одинаково формулируются для всех инерциальных систем отсчета*.

Таким образом, экспериментатор в закрытой кабине, помещенной в межзвездное пространство, не может определить, покоится он или находится в равномерном прямолинейном движении относительно неподвижных звезд. Принцип относительности Галилея — один из первых принципов в физике. Он выдержал многократную проверку опытом и согласуется со специальной теорией относительности.

## § 4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Выше (§ 2) было показано, что определенные задачи кинематики невозможно анализировать используя модель материальной точки, и необходимо прибегать к более сложному понятию абсолютно твердого тела. Те же сложности возникают и в динамике. Для перехода к модели ТТ мы вначале рассмотрим произвольную систему МТ и далее наложим условие неизменности расстояния между ними. Предварительно нам будет необходимо познакомиться с некоторыми новыми физическими величинами.

### 4.1. Моменты силы и импульса относительно точки

Дадим два определения:

1. *Моментом силы  $\vec{F}$  относительно точки пространства  $O$*  называется векторное произведение радиуса-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из точки  $O$  в точку приложения силы, и силы  $\vec{F}$  (рис. 4.1):

$$\vec{N} = [\vec{r} \vec{F}]. \quad (4.1)$$

Модуль векторного произведения, как известно, равен

$$N = rF \sin \alpha = Fa,$$

то есть определяется площадью параллелограмма, сторонами которого являются векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ . Очевидно, если точка приложения силы смещается вдоль направления ее действия, то указанная площадь остается неизменной. Вектор  $\vec{N}$  перпендикулярен рассматриваемой площадке и направлен в соответствии с правилом правого винта.

Единицей измерения момента силы  $N$  в системе СИ является ньютон-метр (Н·м).

2. *Моментом импульса материальной точки относительно точки пространства  $O$*  называется векторное произведение радиуса-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из точки  $O$  к данной МТ, и импульса МТ:

$$\vec{M} = [\vec{r} \vec{p}] = [\vec{r} m \vec{v}]. \quad (4.2)$$

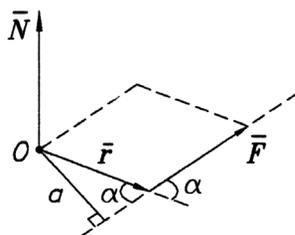


Рис. 4.1

Все приведенные выше рассуждения относительно свойств вектора  $\vec{N}$  справедливы и для момента импульса.

Единицей измерения момента импульса  $M$  в системе СИ является  $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ .

3. Если рассмотреть движение МТ относительно инерциальной системы отсчета и предположить, что точка  $O$  неподвижна в этой системе, то векторы  $\vec{M}$  и  $\vec{N}$  оказываются связанными. Действительно, продифференцируем по времени величину  $\vec{M}$ :

$$\dot{\vec{M}} = [\dot{\vec{r}} \vec{p}] + [\vec{r} \dot{\vec{p}}]. \quad (4.3)$$

Так как точка  $O$  неподвижна, то  $\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}$ , и в первом слагаемом в правой части (4.3) перемножаются два параллельных вектора:

$$\left[ \frac{\vec{p}}{m} \vec{p} \right] = 0.$$

В соответствии со вторым законом Ньютона  $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ . Следовательно,

$$\dot{\vec{M}} = [\vec{r} \vec{F}];$$

$$\dot{\vec{M}} = \vec{N}. \quad (4.4)$$

Полученное соотношение (4.4) носит название *уравнения моментов* для МТ и свидетельствует о том, что в инерциальной системе отсчета производная по времени момента импульса МТ относительно неподвижной точки пространства  $O$  равна моменту действующей на МТ силы относительно той же точки  $O$ . Это уравнение остается справедливым и для высоких скоростей  $v \sim c$ .

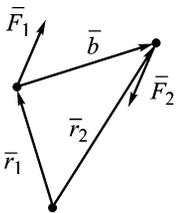


Рис. 4.2

**Пример.** При решении задач часто возникает ситуация, когда тело движется под действием пары сил, то есть сил, векторная сумма которых равна нулю:  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$  (рис. 4.2). Покажем, что суммарный момент такой пары сил не зависит от выбора точки  $O$ , относительно которой рассчитываются моменты. Действительно,

$$\vec{M} = [\vec{r}_1 \vec{F}_1] + [\vec{r}_2 \vec{F}_2] = [\vec{r}_2 \vec{F}_2] - [\vec{r}_1 \vec{F}_2] = [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \vec{F}_2] = [\vec{b} \vec{F}_2],$$

где вектор  $\vec{b}$  проводится от точки приложения силы  $\vec{F}_1$  к точке приложения силы  $\vec{F}_2$  (рис. 4.2).

#### 4.2. Уравнение моментов для системы материальных точек

Пусть имеется  $\mathcal{N}$  МТ массами  $m_1, \dots, m_{\mathcal{N}}$ , с координатами  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{\mathcal{N}}$  и скоростями  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{\mathcal{N}}$ . Рассмотрим их движение в инерциальной системе отсчета и предположим, что точка  $O$ , относительно которой мы будем рассчитывать моменты, неподвижна. Тогда уравнение типа (4.4) для МТ с номером  $i$  имеет вид

$$\dot{\vec{M}}_i = [\vec{r}_i \vec{F}_{i1}] + \dots + [\vec{r}_i \vec{F}_{i,i-1}] + [\vec{r}_i \vec{F}_{i,i+1}] + \dots + [\vec{r}_i \vec{F}_{i,\mathcal{N}}] + [\vec{r}_i \vec{F}_i]. \quad (4.5)$$

Первые  $\mathcal{N} - 1$  слагаемых (4.5) связаны с силами, действующими между МТ, включенными в механическую систему, и называемыми *внутренними силами*. Слагаемых, содержащих моменты внутренних сил, всегда на единицу меньше, чем число МТ в системе, ибо тело не оказывает воздействия само на себя, то есть всегда отсутствуют внутренние силы с одинаковыми индексами. Последнее слагаемое обусловлено наличием силы, действующей на МТ  $i$  со стороны тел, не включенных в механическую систему. Такая сила называется *внешней*.

Сложим уравнения вида (4.5) для всех МТ системы:

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \dot{\vec{M}}_i = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sum_{j=1, j \neq i}^{\mathcal{N}} [\vec{r}_i \vec{F}_{ij}] + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} [\vec{r}_i \vec{F}_i]. \quad (4.6)$$

Проанализируем последовательно все члены уравнения (4.6).

$$1. \quad \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \dot{\vec{M}}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{M}_i,$$

так как можно менять последовательность операций дифференцирования и суммирования. Выражение  $\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{M}_i = \vec{M}$  назовем *моментом импульса системы МТ*.

$$2. \quad \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sum_{j=1, j \neq i}^{\mathcal{N}} [\vec{r}_i \vec{F}_{ij}] = 0. \quad (4.7)$$

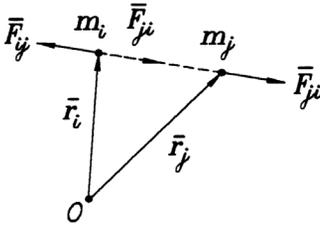


Рис. 4.3

Покажем, что это так. Для этого выделим две МТ с номерами  $i$  и  $j$  (рис. 4.3). Для определенности будем считать, что в попарном взаимодействии МТ отталкиваются. Воспользуемся свойством момента силы, в соответствии с которым вектор  $\vec{N}$  не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль направления ее действия. Силы  $\vec{F}_{ij}$  и  $\vec{F}_{ji}$  связаны третьим законом Ньютона, и, следовательно,  $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$ , тогда

$$[\vec{r}_i \vec{F}_{ij}] + [\vec{r}_j \vec{F}_{ji}] = [\vec{r}_i (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji})] = 0.$$

Все внутренние силы в (4.7) можно разбить на рассмотренные пары, что и доказывает справедливость утверждения (4.7).

3. Выражение  $\sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \vec{F}_i]$  назовем *моментом внешних сил*, действующих на механическую систему  $\vec{N}^{\text{внеш}}$ .

С учетом проведенного анализа можно заключить следующее: в инерциальной системе отсчета производная по времени от момента импульса системы МТ относительно неподвижной точки пространства  $O$  равна моменту *внешних сил*, действующих на систему, относительно той же точки  $O$ :

$$\dot{\vec{M}} = \vec{N}^{\text{внеш}}. \quad (4.8)$$

Хотя формально это уравнение моментов для системы МТ выглядит аналогично уравнению для одной МТ, следует помнить, что при выводе (4.8) были использованы второй и третий законы динамики, в то время как (4.4) является следствием лишь второго закона Ньютона.

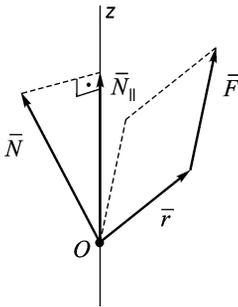


Рис. 4.4

### 4.3. Уравнение моментов для вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Векторы моментов силы и импульса можно спроецировать на некоторую ось, содержащую точку пространства  $O$ , относительно которой рассчитывались  $\vec{N}$  и  $\vec{M}$  (рис. 4.4).

Указанные проекции называют *моментами относительно оси*. Это алгебраические величины, модули которых  $|N_z| = |\vec{N}_{\parallel}|$ ,  $|M_z| = |\vec{M}_{\parallel}|$ . Знаки  $N_z$  и  $M_z$  определяются направлениями векторов  $\vec{N}$  и  $\vec{M}$  соответственно по отношению к оси  $Oz$  (рис. 4.4).

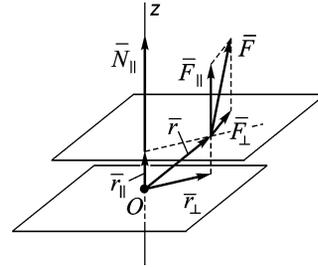


Рис. 4.5

Получим выражения для расчета момента силы и момента импульса относительно оси. В выражении (4.1) представим радиус-вектор  $\vec{r}$  и силу  $\vec{F}$  в виде сумм двух компонент, параллельных и перпендикулярных оси (рис. 4.5):

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}, \quad \vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}.$$

С этими обозначениями

$$\vec{N} = [(\vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel})(\vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\parallel})] = [\vec{r}_{\perp}\vec{F}_{\perp}] + [\vec{r}_{\perp}\vec{F}_{\parallel}] + [\vec{r}_{\parallel}\vec{F}_{\perp}] + [\vec{r}_{\parallel}\vec{F}_{\parallel}]. \quad (4.9)$$

Первое слагаемое в правой части (4.9) является вектором, параллельным оси  $Oz$ :

$$[\vec{r}_{\perp}\vec{F}_{\perp}] = \vec{N}_{\parallel}.$$

Как уже отмечалось, модуль этого вектора равен величине проекции  $\vec{N}$  на ось  $Oz$ .

Следующие два слагаемых в (4.9) будут векторами, перпендикулярными оси  $Oz$ :

$$[\vec{r}_{\perp}\vec{F}_{\parallel}] + [\vec{r}_{\parallel}\vec{F}_{\perp}] = \vec{N}_{\perp}.$$

Проекция  $\vec{N}_{\perp}$  на ось  $Oz$  равна нулю. Последнее слагаемое в (4.9) равно нулю, так как перемножаются коллинеарные векторы.

В итоге

$$|N_z| = r_{\perp}F_{\perp} \sin\alpha, \quad (4.10)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{r}_{\perp}$  и  $\vec{F}_{\perp}$ . Оба вектора лежат в плоскости, перпендикулярной оси  $Oz$ . Следовательно,  $r_{\perp} \sin\alpha$  есть кратчайшее расстояние от оси до направления действия силы  $\vec{F}_{\perp}$ , которое называется *плечом силы*  $\vec{F}_{\perp}$ . Таким образом, если сила  $\vec{F}$  лежит в плоскости, перпендикулярной оси  $Oz$ , то мо-

мент силы относительно этой оси определяется взятым с надлежащим знаком произведением величины силы на плечо.

Аналогичные рассуждения справедливы и для момента импульса относительно оси.

Пусть движение системы МТ рассматривается в инерциальной системе отсчета и ось  $Oz$  неподвижна. Тогда уравнение моментов можно спроецировать на указанную ось:

$$\dot{M}_z = N_z^{\text{внеш}}. \quad (4.11)$$

Если рассматривается вращение твердого тела (рис. 4.6), то его мысленно можно разбить на малые части массами  $\Delta m_i$ .

Указанные части ТТ должны быть макроскопическими, то есть содержать достаточно большое число атомов, что позволит использовать законы классической механики. Вместе с тем эти части должны быть столь малы, чтобы представлять собой материальные точки, для которых выше было получено уравнение моментов (4.11).

Для ТТ, вращающегося вокруг неподвижной оси  $Oz$ , все выделенные МТ, или элементы твердого тела, массами  $\Delta m_i$  имеют одинаковую угловую скорость  $\bar{\omega}$ ; модули линейных скоростей точек  $v_i = R_i \omega$ . Момент импульса МТ с номером  $i$  равен произведению ее импульса  $\Delta m_i v_i$  на плечо  $R_i$ . Тогда суммарный момент импульса твердого тела относительно оси  $Oz$

$$M_z = \sum_i R_i \Delta m_i v_i = \sum_i R_i \Delta m_i \omega R_i = \omega \sum_i \Delta m_i R_i^2 = I_z \omega, \quad (4.12)$$

где выражение

$$\sum_i \Delta m_i R_i^2 = I_z \quad (4.13)$$

называется *моментом инерции твердого тела относительно оси  $Oz$* . По определению это аддитивная величина, представляющая собой сумму моментов инерции МТ, составляющих тело. Теперь уравнение моментов относительно оси (4.11) будет иметь вид

$$\frac{d(I_z \omega)}{dt} = N_z^{\text{внеш}}. \quad (4.14)$$

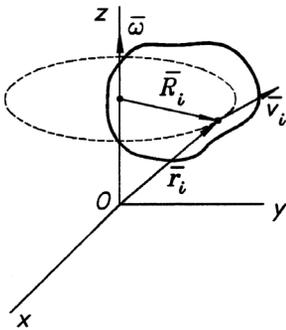


Рис. 4.6

Так как расстояние между макроскопическими частицами ТТ не изменяется в процессе движения, то  $I_z = \text{const}$  и уравнение (4.14) приобретает вид

$$I_z \frac{d\omega}{dt} \equiv I_z \beta = N_z^{\text{внеш}}.$$

Выражение

$$I_z \beta = N_z^{\text{внеш}} \quad (4.15)$$

представляет собой *уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси*. Очевидно, это скалярное соотношение.

Единицей измерения момента инерции  $I_z$  в системе СИ является килограмм-метр в квадрате ( $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ ).

Полезно сопоставить (4.15) с уравнением движения для МТ  $m\vec{a} = \vec{F}$ . Аналогом инертной массы при вращении твердого тела выступает момент инерции тела, который зависит не только от массы ТТ, но и от ее распределения в теле относительно оси. Вместо линейного ускорения в (4.15) фигурирует угловое, а сумма сил, действующих на МТ, заменяется моментом сил, приложенных к ТТ, относительно оси вращения.

В качестве примера применения уравнения (4.15) рассмотрим задачу о движении механической системы, состоящей из неподвижного блока и груза, подвешенного на нити, навитой на блок (рис. 4.7).

Инерциальную систему отсчета свяжем с Землей. Ось координат  $Ox$  для описания движения груза направим вертикально вниз.

Нить будем считать невесомой и нерастяжимой, трение в оси блока и сопротивление воздуха — малыми. Тогда уравнение поступательного движения груза в проекции на ось  $Ox$  будет иметь вид

$$ma_x = mg - F_{\text{н}}.$$

Уравнение динамики вращательного движения блока относительно оси  $z$ , проходящей через его центр, имеет вид:

$$I_z \beta_z = F_{\text{н}} R.$$

Направления осей  $x$  и  $z$  выбраны согласованно, то есть положительной проекции линейного ускорения груза соответству-

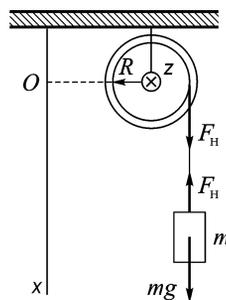


Рис. 4.7

ет положительная проекция углового ускорения вращающегося блока на ось  $z$ .

Величины  $a_x$  и  $\beta_z$  связаны при отсутствии проскальзывания по блоку нерастяжимой нити уравнением кинематической связи

$$a_x = \beta_z R.$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$a_x = \frac{mg}{\frac{I_z}{R^2} + m}.$$

Без учета инерции диска груз падал бы с ускорением  $g$ .

## § 5. ДИНАМИКА ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Более сложным по сравнению с вращением вокруг неподвижной оси является случай плоского движения ТТ. Из кинематики мы знаем, что последнее может быть представлено как одновременно происходящие поступательное движение и вращение. Такое разбиение неоднозначно, и при изменении вклада поступательного перемещения изменяется положение оси поворота тела (§ 2).

Как мы увидим, динамический анализ плоского движения существенно упрощается при одном-единственном выборе положения оси вращения относительно ТТ, а именно для оси, проходящей через центр масс тела. Познакомимся подробнее со свойствами этой точки механической системы.

### 5.1. Центр масс системы материальных точек

Пусть имеется  $\mathcal{N}$  МТ массами  $m_1, \dots, m_{\mathcal{N}}$ , с координатами  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{\mathcal{N}}$  и скоростями  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{\mathcal{N}}$ . Назовем *центром масс* системы МТ точку, радиус-вектор которой определяется выражением

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i}. \quad (5.1)$$

Обозначим суммарную массу системы  $\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i = m$ .  
Тогда координаты центра масс

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i x_i; \quad y_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i y_i; \quad z_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i z_i.$$

Скорость центра масс

$$\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i \vec{v}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{p}_i. \quad (5.2)$$

Если ввести понятие *полного импульса* механической системы:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i \vec{v}_i, \quad (5.3)$$

то эту величину можно выразить через скорость движения центра масс:

$$\vec{P} = m \vec{v}_c. \quad (5.4)$$

Следовательно, *полный импульс системы тел равен произведению их суммарной массы на скорость движения центра масс*.

Рассмотренные представления верны для любых систем отсчета, относительно которых рассматривается движение тел. Если же система отсчета *инерциальная*, то центр масс будет обладать еще одним важнейшим свойством: ускорение центра масс будет определяться только внешними силами, действующими на систему. Это утверждение составляет содержание *теоремы о центре масс*, доказательство которой проводится ниже.

Ускорение центра масс можно связать с ускорениями отдельных МТ системы:

$$\vec{a}_c = \ddot{\vec{r}}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i \vec{a}_i. \quad (5.5)$$

Так как система отсчета инерциальна, то для каждой МТ выполняется второй закон Ньютона

$$m_i \vec{a}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{\mathcal{N}} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i, \quad (5.6)$$

где, как и ранее,  $\vec{F}_{ij}$  — внутренние, а  $\vec{F}_i$  — равнодействующая внешних сил.

Подставляя (5.6) в (5.5), получаем

$$\vec{a}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sum_{j=1, j \neq i}^{\mathcal{N}} \vec{F}_{ij} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{F}_i. \quad (5.7)$$

Первое слагаемое в правой части (5.7) представляет собой сумму всех внутренних сил и в соответствии с третьим законом динамики равно нулю. В итоге имеем

$$m\vec{a}_c = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{F}_i. \quad (5.8)$$

*В инерциальной системе отсчета центр масс механической системы движется как материальная точка суммарной массы под действием всех внешних сил, приложенных к телам системы.*

## 5.2. Уравнение моментов для системы материальных точек относительно центра масс

В этом разделе мы познакомимся с еще одним замечательным свойством центра масс, которое, как указывалось выше, существенно упрощает анализ динамики плоского движения ТТ.

Будем рассматривать движение материальных точек механической системы относительно двух систем отсчета — инерциальной  $Oxyz$  и системы, связанной с центром масс  $C'x'y'z'$ .

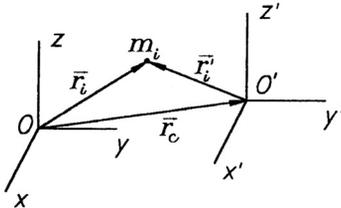


Рис. 5.1

Как следует из раздела 5.1, последняя может двигаться с ускорением, если сумма внешних сил, действующих на материальные точки, не равна нулю. Будем считать, что время в обеих системах отсчета течет одинаково, то есть  $t = t'$ ,

и что системы движутся относительно друг друга *поступательно*. Выразим координаты и скорости МТ в системе  $Oxyz$  через эти характеристики в системе  $C'x'y'z'$  (рис. 5.1):

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{r}_c + \vec{r}'_i, \\ \vec{v}_i &= \vec{v}_c + \vec{v}'_i. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Далее с учетом (5.9) представим момент импульса рассматриваемой системы МТ относительно начала инерциальной системы отсчета (точка  $O$ ) через координаты и скорости системы в  $C'x'y'z'$ :

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} [\vec{r}_i m_i \vec{v}_i] = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} [(\vec{r}_c + \vec{r}'_i) m_i (\vec{v}_c + \vec{v}'_i)] = \\ &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} [\vec{r}'_i m_i \vec{v}'_i] + \left[ \vec{r}_c \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i \vec{v}'_i \right] + \left[ \left( \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i \vec{r}'_i \right) \vec{v}_c \right] + [\vec{r}_c \vec{v}_c] \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i. \quad (5.10)\end{aligned}$$

Рассмотрим последовательно слагаемые в правой части (5.10).

1.  $\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} [\vec{r}'_i m_i \vec{v}'_i] = \vec{M}'$  — момент импульса механической системы относительно центра масс.

2.  $\left[ \vec{r}_c \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i \vec{v}'_i \right] = [\vec{r}_c m \vec{v}'_c]$ , где  $\vec{v}'_c$  — скорость центра масс в системе отсчета  $C'x'y'z'$ ,  $m$  — суммарная масса всех МТ. Очевидно,  $\vec{v}'_c = 0$ .

3.  $\left[ \left( \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i \vec{r}'_i \right) \vec{v}_c \right] = [m \vec{r}'_c \vec{v}_c]$ , где  $\vec{r}'_c$  — положение центра масс в системе отсчета  $C'x'y'z'$ . Очевидно,  $\vec{r}'_c = 0$ .

4.  $[\vec{r}_c \vec{v}_c] \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i = m [\vec{r}_c \vec{v}_c]$ .

Итак,

$$\vec{M} = \vec{M}' + m [\vec{r}_c \vec{v}_c]. \quad (5.11)$$

Теперь полученное выражение (5.11) подставим в уравнение моментов (4.8), справедливое для инерциальной системы отсчета и неподвижной точки  $O$ :

$$\dot{\vec{M}}' + m [\vec{v}_c \vec{v}_c] + [\vec{r}_c m \vec{a}_c] = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} [\vec{r}'_i \vec{F}_i] + \left[ \vec{r}_c \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{F}_i \right]. \quad (5.12)$$

Второе слагаемое в левой части уравнения (5.12) равно нулю. По теореме о центре масс

$$m\vec{a}_c = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i.$$

Следовательно, третье слагаемое в левой части уравнения равно второму слагаемому в правой. В итоге имеем

$$\begin{aligned} \dot{\vec{M}}' &= \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i' \vec{F}_i], \\ \dot{\vec{M}}' &= \vec{N}'^{\text{внеш}}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Мы подошли к довольно неожиданному результату: *в системе отсчета, связанной с центром масс механической системы* (она может быть неинерциальной), *производная по времени момента импульса относительно начала отсчета равна моменту внешних сил, действующих на систему относительно той же точки.* То есть уравнение моментов в системе  $C'x'y'z'$  (5.13) внешне выглядит точно так же, как и для инерциальной системы отсчета  $Oxyz$ .

Воспользуемся полученным результатом для анализа плоского движения твердого тела.

### 5.3. Уравнения динамики плоского движения твердого тела

Плоское движение ТТ представим как совокупность поступательного перемещения центра масс и вращения вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной к плоскостям, в которых движутся частицы тела. Коль скоро в системе отсчета, связанной с центром масс, тело совершает только вращение около неподвижной оси, при проецировании векторного уравнения моментов (5.13) на указанную ось имеем

$$\dot{M}'_{cz} = I_{cz} \beta_{cz} = N'_{cz}{}^{\text{внеш}}, \quad (5.14)$$

где  $I_{cz}$  — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс;  $N'_{cz}{}^{\text{внеш}}$  — момент внешних сил относительно той же оси. Приведенное уравнение следует дополнить теоремой о центре масс (5.8), а также установить связь линейного ускорения центра масс  $a_c$  с угловым ускорением ТТ. В итоге

получим полную систему уравнений, описывающих движение твердого тела.

**Пример 1.** Найти ускорение центра масс (т.  $O$ ) подвижного блока массой  $m$  и радиуса  $R$  (рис. 5.2). Нить считать невесомой и нерастяжимой. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Поступательное движение центра масс рассмотрим относительно инерциальной системы отсчета, связанной с Землей:

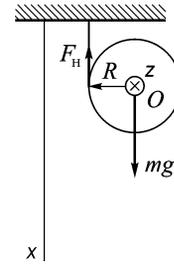


Рис. 5.2

$$ma_{cx} = mg - F_H. \quad (1)$$

Уравнение моментов (5.14) запишем относительно оси  $z$ , проходящей через центр масс диска :

$$I_{cz}\beta_{cz} = F_H R. \quad (2)$$

Направления осей  $x$  и  $z$  выбраны согласованно, то есть положительной проекции линейного ускорения центра масс блока соответствует положительная проекция углового ускорения вращения блока вокруг оси  $z$ .

Ускорения  $a_{cx}$  и  $\beta_{cz}$  в отсутствие проскальзывания нити связаны:

$$a_{cx} = \beta_{cz} R. \quad (3)$$

Решая систему уравнений (1)–(3), получаем

$$a_{cx} = \frac{mg}{m + \frac{I_{cz}}{R^2}}.$$

**Пример 2.** Найти ускорение центра масс шара массой  $m$ , радиуса  $R$ , скатывающегося без проскальзывания по наклонной плоскости, расположенной под углом  $\alpha$  к горизонту (рис. 5.3).

Поступательное движение центра масс рассматриваем относительно инерциальной системы отсчета, связанной с Землей

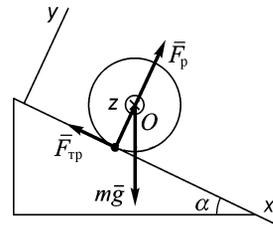


Рис. 5.3

$$ma_{cx} = mg \sin \alpha - F_{TP},$$

$$ma_{cy} = F_P - mg \cos \alpha.$$

Уравнение моментов записываем относительно оси  $z$ , проходящей через точку  $O$  — центр масс шара — перпендикулярно плоскости рисунка:

$$I_{cz}\beta_{cz} = F_{\text{тр}}R; \quad I_{cz} = \frac{2}{5}mR^2;$$

$$a_{cy} = 0; \quad a_{cx} = \beta_{cz}R.$$

Отсюда

$$a_{cx} = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I_{cz}}{R^2}} = \frac{5g \sin \alpha}{7}.$$

### 5.4. Расчет моментов инерции твердых тел

Как было показано в предыдущих разделах, мерой инертности ТТ, определяющей динамику его вращения, является момент инерции относительно оси. Разбивая тело на малые, но макроскопические элементы, от суммирования в (4.13) можно перейти к интегрированию по объему тела:

$$I_z = \int R^2 dm = \int_V R^2 \rho(\vec{r}) dV, \quad (5.15)$$

где  $R$  — расстояние от выделенного элемента массой  $dm$  до оси вращения,  $\rho(\vec{r})$  — плотность вещества в точке, где расположен элемент объема  $dV$ .

Расчет интеграла (5.15) аналитически возможен в ограниченном числе случаев, обладающих определенной симметрией. Приведем ряд примеров:

**Пример 1.** Однородный тонкий стержень длиной  $l$  и массой  $m$ .

Пусть ось  $Oz$  проходит перпендикулярно стержню через его середину (рис. 5.4).

Выделим малый элемент стержня массой  $dm$ . Для интегрирования зададим ось  $Ox$ . Если площадь сечения стержня равна  $S$ , а плотность материала  $\rho$ , то  $dm = \rho S dx$ , причем  $S$  и  $\rho$  постоянны;

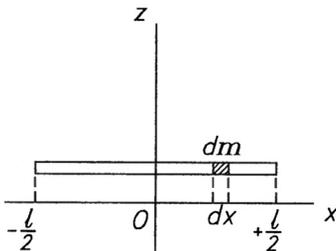


Рис. 5.4

$$dI_z = x^2 dm = \rho S x^2 dx;$$

$$I_z = \int_{-l/2}^{+l/2} \rho S x^2 dx = \rho S \frac{l^3}{12}. \quad (5.16)$$

С учетом того, что  $\rho Sl = m$ , получаем

$$I_z = \frac{ml^2}{12}. \quad (5.17)$$

Если ось  $Oz$  проведена через один из концов стержня, то момент инерции существенно возрастет (пределы интегрирования в (5.16) заменятся на  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = l$ ):

$$I_z = \frac{ml^2}{3}. \quad (5.18)$$

**Пример 2.** Тонкое кольцо радиуса  $R$  и массой  $m$  (рис. 5.5).

Пусть ось  $z$  перпендикулярна плоскости кольца и проходит через его центр. Тогда

$$I_z = \int R^2 dm = R^2 \int dm = mR^2, \quad (5.19)$$

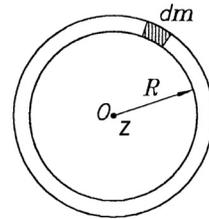


Рис. 5.5

причем мы не требовали однородности материала кольца.

**Пример 3.** Однородный диск радиуса  $R$  и массой  $m$  (рис. 5.6).

Воспользуемся свойством аддитивности момента инерции и результатами предыдущего примера и разобьем диск на тонкие кольца с внутренними радиусами  $r$  и внешними радиусами  $r + dr$ . Пусть  $\rho$  — плотность вещества диска, постоянная для всех его точек;  $h$  — толщина диска. Момент инерции каждого рассматриваемого тонкого кольца

$$dI_z = 2\pi r dr \cdot h \cdot \rho r^2.$$

Для всего диска

$$I_z = \int_0^R 2\pi r^3 dr \cdot h \rho = h \rho \frac{\pi R^4}{2}.$$

Масса диска  $m = \pi R^2 h \rho$ .

Отсюда

$$I_z = \frac{mR^2}{2}. \quad (5.20)$$

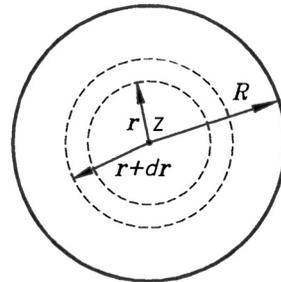


Рис. 5.6

Мы видим, что при одинаковой массе тонкое кольцо имеет вдвое больший момент инерции, что, очевидно, связано с различием в распределении вещества в этих телах относительно оси.

**Пример 4.** Произвольное однородное тело вращения.

Пусть тело ограничено поверхностью, являющейся геометрическим местом точек, которые проходит некоторая кривая, опирающаяся на ось  $Oz$ , при ее вращении вокруг данной оси (рис. 5.7). Пусть  $R(z)$  — уравнение этой кривой. Разобьем тело на тонкие диски толщиной  $dz$  и радиуса  $R(z)$ . В соответствии с формулой (5.20)

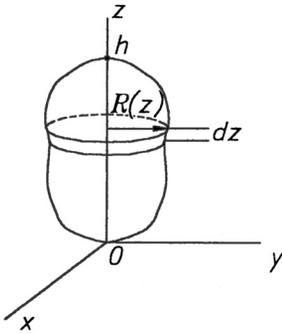


Рис. 5.7

$$dI_z = \frac{R^2(z)}{2} dm = \frac{R^2(z)}{2} \rho \pi R^2(z) dz.$$

Отсюда с учетом  $\rho = \text{const}$

$$I_z = \frac{\pi \rho}{2} \int_0^h R^4(z) dz. \quad (5.21)$$

В качестве примера вычислим момент инерции конуса массой  $m$  и радиуса основания  $R$  (рис. 5.8). Уравнение образующей при таком расположении конуса имеет простой вид

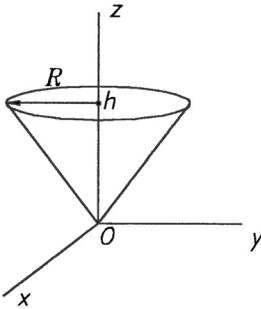


Рис. 5.8

$$R(z) = \frac{R}{h} z.$$

Следовательно,

$$I_z = \frac{\pi \rho}{2} \frac{R^4}{h^4} \int_0^h z^4 dz = \frac{\pi \rho}{2} \frac{R^4}{h^4} \frac{h^5}{5} = \frac{\pi \rho R^4 h}{10}.$$

Объем конуса  $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$ , а его масса

$$m = \frac{\rho \pi R^2 h}{3}.$$

С учетом этого

$$I_z = \frac{3}{10} m R^2.$$

В рассмотренных примерах 2–4 ось, относительно которой рассчитывался момент инерции, являлась осью симметрии тела.

Это, очевидно, существенно упрощало нахождение соответствующих интегралов. Оказывается, знание моментов инерции тел для оси, проходящей через центр масс ТТ, позволяет найти момент инерции тела относительно любой оси, параллельной ей.

### 5.5. Теорема Гюйгенса—Штейнера

Пусть выделены две параллельные оси, жестко связанные с телом, причем одна из них ( $CC$ ) проходит через центр масс ТТ.

На рис. 5.9 представлена плоскость, перпендикулярная этим осям, так что точки  $C$  и  $O'$  представляют собой проекции соответствующих осей на указанную плоскость. Обозначим через  $dm$  физически малый элемент рассматриваемого тела. Пусть  $\vec{R}$  и  $\vec{R}'$  — радиусы-векторы, проведенные в плоскости от соответствующих осей к  $dm$ ,  $\vec{l}$  — вектор, проведенный от оси  $CC$  к оси  $O'O'$ . Тогда из рис. 5.9 легко видеть, что

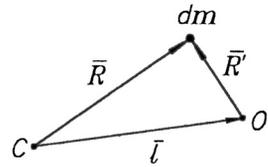


Рис. 5.9

$$\vec{R}' = \vec{R} - \vec{l}. \quad (5.22)$$

Возведем правые и левые части (5.22) в квадрат и проинтегрируем почленно полученные выражения по всему телу:

$$\int R'^2 dm = \int R^2 dm + l^2 \int dm - 2\left(\vec{l} \int \vec{R} dm\right).$$

По определению  $\int R'^2 dm = I_{O'z}$ ;  $\int R^2 dm = I_{Cz}$  — моменты инерции ТТ относительно осей  $O'O'$  и  $CC$  соответственно.

Интеграл  $\int \vec{R} dm = m\vec{R}_c$ , где  $\vec{R}_c$  определяет положение проекции центра масс на плоскость, перпендикулярную рассматриваемым осям. Коль скоро ось  $CC$  проходит через центр масс ТТ, вектор  $\vec{R}_c = 0$ .

Таким образом, имеем

$$I_{O'z} = I_{Cz} + ml^2. \quad (5.23)$$

Это математическая запись *теоремы Гюйгенса—Штейнера* (теоремы о параллельных осях), которую можно сформулировать следующим образом: *момент инерции тела относительно произвольной оси равен его моменту инерции относительно параллельной*

оси, проходящей через центр масс, сложенному с величиной, равной произведению массы тела на квадрат расстояния между осями.

Например, с помощью доказанной теоремы можно связать найденные выше значения моментов инерции стержня относительно осей, проходящих через центр масс  $I_{cz}$  и через край стержня  $I_{o'z}$ . Действительно, согласно теореме,

$$I_{o'z} = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3},$$

что было получено ранее прямым расчетом.

Однако в ряде случаев нахождение момента инерции тела относительно произвольной оси крайне затруднительно. К таким примерам можно отнести расчет величины  $I_{o'z}$  для кольца. Как следует из примера 2 (разд. 5.4), момент инерции такого тела относительно оси симметрии  $I_{cz}$  находится тривиально. Но если ось проходит, скажем, через край кольца перпендикулярно его плоскости, симметрия, облегчавшая вычисление, уже отсутствует. В то же время использование теоремы Гюйгенса—Штейнера позволяет легко найти необходимую величину:

$$I_{o'z} = mR^2 + mR^2 = 2mR^2.$$

## § 6. РАБОТА СИЛЫ, МОЩНОСТЬ, ЭНЕРГИЯ

Пространственной характеристикой действия силы является механическая работа. Она совершается тогда, когда под действием этой силы происходит изменение модуля скорости тела. Понятие работы играет исключительно важную роль в физике, ибо позволяет сформулировать один из фундаментальных законов — закон сохранения энергии.

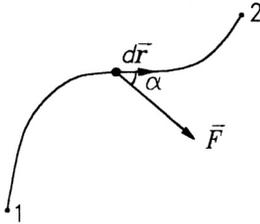


Рис. 6.1

### 6.1. Работа сил

Пусть МТ под действием силы  $\vec{F}$  перемещается из положения 1 в положение 2 (рис. 6.1). *Элементарной работой* назовем скалярное произведение вектора силы на вектор малого перемещения МТ:

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F \cos \alpha dr. \quad (6.1)$$

Для нахождения работы силы на участке траектории 1–2 необходимо разбить траекторию движения МТ на бесконечно малые участки, найти в соответствии с (6.1) работу на этих участках, а затем просуммировать эти вклады. Такая операция соответствует нахождению интеграла вдоль траектории:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F \cos \alpha dr. \quad (6.2)$$

Отметим, что в правой части (6.2) символом  $dr$  обозначен модуль вектора малого перемещения:  $dr = |d\vec{r}|$ .

Учитывая связь малого перемещения с мгновенной скоростью МТ, выражение (6.2) может быть записано в виде

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \vec{V} dt. \quad (6.3)$$

Скалярное произведение векторов силы и скорости называется *мощностью силы*  $W$ :

$$W(t) = \vec{F}(t) \vec{V}(t). \quad (6.4)$$

Очевидно, если векторы  $\vec{F}$  и  $\vec{V}$  перпендикулярны, мощность силы равна нулю и работа данной силой не совершается.

Мощность можно определить и как работу, совершаемую в единицу времени:

$$W(t) = \frac{dA}{dt}. \quad (6.5)$$

Единицей измерения работы  $A$  в системе СИ является джоуль (1 Дж = 1 Н · 1 м), а мощности  $W$  — ватт (1 Вт = 1 Дж/1 с).

Если на МТ действует несколько сил  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_N$ , то совершаемая ими работа суммируется:

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_N) d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F}_1 d\vec{r} + \dots + \int_1^2 \vec{F}_N d\vec{r} = A_{12}^{(1)} + \dots + A_{12}^{(N)}. \quad (6.6)$$

Если МТ вращается вокруг оси (рис. 6.2), то элементарная работа

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \vec{V} dt = \vec{F} [\vec{\omega} \vec{r}] dt. \quad (6.7)$$

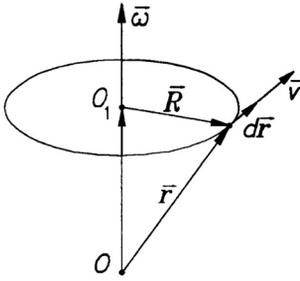


Рис. 6.2

В соответствии с правилами циклической перестановки векторов в смешанном произведении получаем

$$dA = \vec{\omega} [\vec{r} \vec{F}] dt = \vec{\omega} \vec{N} dt. \quad (6.8)$$

Работа, совершаемая при повороте на малый угол  $d\vec{\alpha}$ , равна

$$dA = \vec{N} d\vec{\alpha},$$

на конечный угол —

$$A_{12} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \vec{N} d\vec{\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{N} \vec{\omega} dt. \quad (6.9)$$

Мощность силы в данном случае равна

$$W(t) = \vec{N}(t) \vec{\omega}(t). \quad (6.10)$$

Если происходит поворот ТТ, то необходимо учесть действие всех сил на его отдельные точки и затем в соответствии с (6.9) просуммировать их вклады в работу. При этом, как уже отмечалось, сумма моментов всех внутренних сил равна нулю и работу совершают лишь внешние силы:

$$dA = \vec{\omega} \left( \sum_i \sum_{j, j \neq i} [\vec{r}_i \vec{F}_{ij}] + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} [\vec{r}_i \vec{F}_i] \right) dt = \vec{\omega} \vec{N}^{\text{внеш}} dt,$$

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\omega}(t) \vec{N}^{\text{внеш}}(t) dt. \quad (6.11)$$

## 6.2. Потенциальная энергия

Ограничимся рассмотрением сил, явно не зависящих от времени. Математически это фиксируется равенством нулю частной производной силы по времени:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = 0.$$

С точки зрения совершения силами работы их можно разбить на три группы.

К первой группе отнесем силы, работа которых *не зависит от формы траектории* движения МТ, а определяется лишь начальным и конечным положениями МТ. Такие силы называются *потенциальными или консервативными*. К этому классу относятся гравитационные, упругие и электростатические силы (разд. 3.4).

Для второй группы сил совершаемая ими работа определяется траекторией движения. К этой группе относятся силы трения, сопротивления. Так, в частности, для случая сухого трения скольжения сила в любой момент постоянна по величине и направлена против малого перемещения. Совершаемая ею работа оказывается пропорциональной пройденному пути:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{тр}} d\vec{r} = -F_{\text{тр}} \int_1^2 dr = -F_{\text{тр}} s_{12}.$$

Наконец, существует третий класс сил, которые при движении МТ работу не совершают. Эти силы всегда перпендикулярны малому перемещению МТ. Примером может служить сила Лоренца (разд. 3.4).

Рассмотрим подробнее свойства потенциальных сил. Пусть МТ перемещается по замкнутой кривой  $L$  (рис. 6.3). Найдем совершаемую при этом работу. То обстоятельство, что интеграл определяется вдоль замкнутой траектории, обозначается кружком на соответствующем символе:

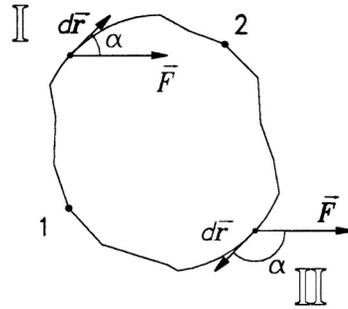


Рис. 6.3

$$A = \oint_L \vec{F} d\vec{r}. \tag{6.12}$$

Разобьем траекторию на два участка —  $L_I$  и  $L_{II}$ . Тогда

$$\oint_L \vec{F} d\vec{r} = \int_{1(L_I)}^2 \vec{F} d\vec{r} + \int_{2(L_{II})}^1 \vec{F} d\vec{r}. \tag{6.13}$$

Если во втором интеграле в правой части (6.13) поменять порядок интегрирования, то он изменит знак на противоположный, однако по модулю будет равен первому интегралу в этой же части (6.13), согласно свойству потенциальности силы. В итоге

получаем важный результат: работа потенциальной силы при перемещении МТ по замкнутой кривой равна нулю. Математически это можно записать следующим образом:

$$\oint_L \vec{F} d\vec{r} = 0. \quad (6.14)$$

Без доказательства воспользуемся математической теоремой о том, что если векторная функция  $\vec{F}(x, y, z)$  удовлетворяет уравнению (6.14), то существует такая скалярная функция координат  $U(x, y, z)$ , через частные производные которой можно выразить соответствующие проекции  $\vec{F}(x, y, z)$ :

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (6.15)$$

Знак «минус» перед производными с математической точки зрения не нужен, однако введенная таким образом функция  $U(x, y, z)$ , называемая *потенциальной энергией* МТ, будет играть важнейшую роль при формулировке закона сохранения энергии.

Если на МТ в некоторой области пространства действуют силы, которые могут быть заданы как функции координат точки, то говорят, что МТ находится в *поле* сил. Если сила в каждой точке силового поля не зависит от времени, то такое поле называется *стационарным*. Поле сил, для которого можно ввести потенциальную энергию, называется *потенциальным*. Потенциальная энергия является характеристикой поля сил, и знание функции  $U(x, y, z)$  позволяет определить вектор силы, действующей на МТ, в любом ее положении. Выражения (6.15) компактно можно записать используя математический символ градиента скалярной функции:

$$\vec{F} = -\left( \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \right) \equiv -\text{grad}U. \quad (6.16)$$

Найдем работу, совершаемую потенциальной силой при элементарном перемещении МТ:

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = -\left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) \equiv -dU. \quad (6.17)$$

Выражение в скобках представляет собой полный дифференциал функции трех переменных  $U(x, y, z)$ . Для случая перемещения на конечное расстояние работа потенциальной силы равна разности потенциальных энергий в начальном и конечном положениях МТ:

$$A_{12} = -\int_1^2 dU = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \equiv U_1 - U_2. \quad (6.18)$$

Сделаем два замечания.

1. Условие потенциальности является сильным ограничением на функции  $\vec{F}(x, y, z)$ . Действительно, в общем случае векторная функция может быть задана через три скалярные функции вида  $F_x(x, y, z)$ ;  $F_y(x, y, z)$  и  $F_z(x, y, z)$ , являющиеся проекциями  $\vec{F}$  на оси координат. Однако для потенциальной силы достаточно задать одну скалярную функцию  $U(x, y, z)$ , полностью определяющую вектор  $\vec{F}$  в любой точке пространства.

2. Измеряемые в опытах физические величины — сила и работа силы — находятся через производные и разность значений потенциальной энергии. Следовательно, функция  $U(x, y, z)$  определена с точностью до константы. Поэтому говорят, что само значение потенциальной энергии не имеет физического смысла, но количественный смысл имеет только разность значений потенциальной энергии. Однако если приравнять значение функции  $U(x, y, z)$  нулю в некоторой точке с координатами  $x_0, y_0, z_0$ , то работа, совершаемая силовым полем по перемещению МТ в указанное положение,

$$A_{10} = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = U(x, y, z) \quad (6.19)$$

будет целиком определяться введенной таким образом функцией  $U(x, y, z)$ . При этом говорят, что потенциальная энергия *нормирована* в точке  $x_0, y_0, z_0$ .

### 6.3. Примеры расчета потенциальной энергии для некоторых типов силовых полей

1. Прежде всего покажем, что любая *центральная сила* в случае стационарного поля сил потенциальна. Сила, действующая на МТ, называется центральной, если ее величина зависит только от расстояния между МТ и некоторым силовым центром, а направлена она вдоль прямой, проведенной от этого центра к

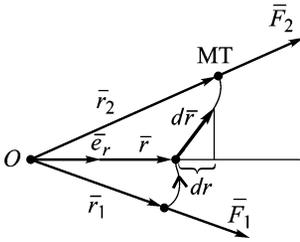


Рис. 6.4

МТ (рис. 6.4). Силовой центр в случае стационарных полей неподвижен.

Математически это свойство можно описать следующим образом:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(r) = F_r(r)\vec{e}_r \equiv F_r(r)\frac{\vec{r}}{r}. \quad (6.20)$$

В (6.20)  $F_r(r)$  есть проекция вектора  $\vec{F}$  на направление вектора  $\vec{r}$ ,  $\vec{e}_r$  — единичный вектор, задающий радиальное направление от силового центра. Найдем работу, совершаемую центральной силой при перемещении МТ из положения  $\vec{r}_1$  в положение  $\vec{r}_2$  (рис. 6.4):

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \int_1^2 F_r(r)\vec{e}_r d\vec{r} = \int_1^2 F_r(r)\frac{\vec{r}}{r}d\vec{r}. \quad (6.21)$$

Скалярное произведение  $(\vec{e}_r, d\vec{r})$  равно проекции вектора  $d\vec{r}$  на единичный вектор  $\vec{e}_r$ , то есть приращению модуля радиуса-вектора (см. рис. 6.4):

$$\vec{e}_r, d\vec{r} = dr.$$

Упростить интеграл (6.21) можно иначе, доказав тождество, справедливое для любого вектора:

$$\vec{A}d\vec{A} \equiv AdA. \quad (6.22)$$

Для этого найдем дифференциалы от скалярного произведения  $(\vec{A}\vec{A})$  и от квадрата модуля  $A^2$ :

$$d(\vec{A}\vec{A}) = 2\vec{A}d\vec{A},$$

$$d(A^2) = 2AdA.$$

Но, очевидно,  $(\vec{A}\vec{A}) = A^2$ , что и доказывает тождество (6.22). С учетом этого

$$A_{12} = \int_1^2 F_r(r)dr.$$

Подчеркнем, что  $dr$  здесь является проекцией малого перемещения на радиальное направление.

Тем самым криволинейный интеграл вдоль траектории  $L$  сводится просто к определенному интегралу от скалярной функции  $F_r(r)$ :

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F_r(r) dr = U(r_1) - U(r_2), \quad (6.23)$$

где, по правилу нахождения определенного интеграла,

$$U(r) = -\int F_r(r) dr + \text{const}. \quad (6.24)$$

Таким образом, работа силы по перемещению МТ может быть выражена через разность значений некоторой скалярной функции, соответствующих начальному и конечному положению МТ. Следовательно, первообразная функции  $F(r)$ , взятая с обратным знаком, представляет в данном случае выражение для потенциальной энергии МТ в поле центральной силы. Применим полученное общее выражение (6.24) для гравитационного, электростатического и упругого взаимодействий.

2. Пусть между двумя МТ действует гравитационная сила и первая МТ является силовым центром, тогда проекция на направление радиуса-вектора силы, действующей на вторую МТ:

$$F_{r21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (6.25)$$

где  $r$  — модуль радиуса-вектора, проведенного из точки 1 в точку 2. Тогда в соответствии с (6.24)

$$U(r) = -\int \left( -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \right) dr + \text{const} = -G \frac{m_1 m_2}{r} + \text{const}.$$

С целью нормировки потенциальной энергии можно положить константу равной нулю, то есть считать, что для бесконечно удаленных МТ  $U = 0$ , тогда

$$U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (6.26)$$

Если размеры и массы тел существенно различаются, причем более массивное тело ( $m_1$ ) является однородным шаром радиуса  $R$ , а малое тело находится на расстоянии  $h$  от поверхности этого шара, то

$$U(h) = -G \frac{m_1 m_2}{(R+h)} \approx G \frac{m_1 m_2 h}{R^2} - G \frac{m_1 m_2}{R}.$$

К выражению для потенциальной энергии можно прибавить или отнять от него любую константу, в частности, можно отбросить член вида

$$G \frac{m_1 m_2}{R^2}.$$

Это будет соответствовать нормировке, при которой потенциальная энергия малого тела равна нулю на поверхности большого. Рассмотренный пример, в частности, описывает потенциальную энергию тела массой  $m$  в поле сил тяжести Земли:

$$U(r) = mgh,$$

где  $g = G \frac{M}{R_3^2}$ ,  $M$  — масса Земли и  $R_3$  — радиус Земли.

3. Расчет потенциальной энергии взаимодействия двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$  в вакууме полностью аналогичен и приводит к выражению

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (6.27)$$

4. При расчетах потенциальной энергии для упругого взаимодействия будем считать, что пружина может свободно вращаться вокруг одного из закрепленных концов, причем деформация пружины происходит вдоль ее оси и подчиняется закону Гука (рис. 6.5).

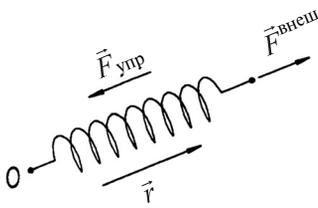


Рис. 6.5

В этом случае сила упругости будет центральной, и зависимость ее проекции на радиальное направление от координаты описывается следующим выражением (см. разд. 3.4):

$$F_{r \text{ упр}} = -k(r - r_0),$$

где  $r$  — координата незакрепленного конца пружины,  $r_0$  соответствует случаю недеформированной пружины.

В соответствии с (6.24) потенциальная энергия

$$U(r) = -\int (-k(r - r_0)) dr + \text{const} = \frac{k(r - r_0)^2}{2} + \text{const}.$$

В примере с пружиной удобно считать, что  $U = 0$  при отсутствии деформации. Таким образом, после нормировки имеем

$$U(r) = \frac{k(r - r_0)^2}{2}. \quad (6.28)$$

### 6.4. Кинетическая энергия

Мы уже отмечали, что, если сила совершает работу по перемещению МТ, происходит изменение модуля скорости МТ. Проанализируем этот вопрос количественно. Будем рассматривать движение МТ под действием силы  $\vec{F}$  относительно инерциальной системы отсчета. Тогда в соответствии со вторым законом динамики

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \quad (6.29)$$

Малое перемещение МТ связано с ее мгновенной скоростью:

$$\vec{v} dt = d\vec{r}. \quad (6.30)$$

Перемножим почленно уравнения (6.29) и (6.30):

$$m \vec{v} d\vec{v} = \vec{F} d\vec{r}. \quad (6.31)$$

Ранее было показано (см. (6.22)), что

$$\vec{v} d\vec{v} = v dv.$$

Тогда

$$m \vec{v} d\vec{v} = md \left( \frac{v^2}{2} \right). \quad (6.32)$$

Введем понятие *кинетической энергии МТ*, определив ее как *половину произведения массы материальной точки на квадрат ее скорости*:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (6.33)$$

С учетом (6.32) и (6.33) уравнение (6.31) принимает вид

$$dT = \vec{F} d\vec{r} = dA. \quad (6.34)$$

Изменение кинетической энергии МТ на конечном отрезке траектории определяется работой всех сил, действующих на данную МТ:

$$\int_1^2 dT \equiv T_2 - T_1 = \int_1^2 dA \equiv A_{12}. \quad (6.35)$$

Приведенное утверждение носит название *теоремы о кинетической энергии*. Следует помнить, что теорема справедлива только для инерциальных систем отсчета. Кинетическую энергию МТ можно связать также с ее импульсом:

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{\bar{p}\vec{v}}{2}. \quad (6.36)$$

Важно подчеркнуть, что понятие кинетической энергии вводилось с использованием второго закона динамики для малых скоростей ( $v \ll c$ ). Поэтому формулы (6.33) и (6.36) справедливы лишь в нерелятивистском случае.

Кинетическая энергия — аддитивная величина. Для системы МТ

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (6.37)$$

Если механическая система представляет собой твердое тело, закрепленное на оси  $Oz$ , то его кинетическая энергия

$$T = \sum_i \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \Delta m_i R_i^2 = \frac{I_z \omega^2}{2}. \quad (6.38)$$

С учетом того, что момент импульса твердого тела относительно оси  $Oz$  равен произведению момента инерции  $I_z$  на угловую скорость, выражение для кинетической энергии вращения можно записать как

$$T = \frac{M_z^2}{2I_z} = \frac{\vec{M}\vec{\omega}}{2}. \quad (6.39)$$

Если тело совершает плоское движение, то представим его как последовательность поворотов вокруг мгновенной оси  $O_M$ .

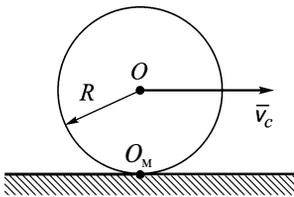


Рис. 6.6

При качении без проскальзывания шара, цилиндра, обруча и т.д.  $\omega = v_c/R$  (рис. 6.6). Кинетическая энергия такого движения

$$T = \frac{I_{O_M z} \omega^2}{2} = \frac{I_{O_M z} v_c^2}{2R^2}.$$

В соответствии с теоремой Гюйгенса–Штейнера (разд. 5.5)

$$I_{o,z} = I_{cz} + mR^2, \text{ и}$$

$$T = \frac{I_{cz}\omega^2}{2} + \frac{mV_c^2}{2}. \quad (6.40)$$

Таким образом, при качении указанных тел без проскальзывания кинетическая энергия может быть представлена в виде суммы кинетических энергий поступательного движения центра масс и вращения вокруг оси, проходящей через центр масс.

### 6.5. Полная механическая энергия материальной точки

Пусть движение МТ рассматривается относительно инерциальной системы отсчета. Тогда в соответствии с теоремой о кинетической энергии

$$T_2 - T_1 = A_{12} = U_1 - U_2 + A_{12}^{\text{мп}}, \quad (6.41)$$

где правая часть представляет собой сумму работ потенциальных и непотенциальных сил.

Введем понятие полной механической энергии МТ как суммы ее кинетической и потенциальной энергий

$$\mathcal{E} = T + U. \quad (6.42)$$

Тогда (6.41) можно переписать в виде:

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = A_{12}^{\text{мп}}. \quad (6.43)$$

Таким образом, *в случае неподвижных силовых центров изменение полной энергии МТ равно работе непотенциальных сил.* Соотношение (6.43), по существу, является тривиальным следствием второго закона Ньютона. Очевидно, что при отсутствии непотенциальных сил полная механическая энергия МТ постоянна. В следующем разделе мы обобщим соотношение (6.43) на случай системы МТ.

## § 7. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Если при строго определенных условиях некоторая физическая величина не изменяет своего значения со временем, то говорят, что выполняется закон сохранения данной величины. На сегодняшний день известно несколько законов сохранения. Некоторые из них следует считать точными, другие — приближенными. Законы сохранения связаны с самыми общими свойствами окружающего нас мира и, как правило, являются следствием определенной симметрии во Вселенной. В механике мы будем знакомиться с тремя законами сохранения — энергии, импульса и момента импульса.

### 7.1. Закон сохранения механической энергии

Прежде всего отметим, что мы будем иметь дело с частным случаем общезначимого закона сохранения энергии, рассматривая только механическую форму движения материи. Следовательно, переход механической энергии в любые другие виды (тепловую, электрическую и т.д.) в данном случае представляет собой потерю энергии в анализируемой системе.

Пусть механическая система содержит  $\mathcal{N}$  МТ массами  $m_1, \dots, m_{\mathcal{N}}$  с координатами  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{\mathcal{N}}$  и скоростями  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{\mathcal{N}}$ . Между телами системы действуют внутренние силы  $\vec{F}_{ij}$ . Со стороны тел, не включенных в систему, приложены внешние силы  $\vec{F}_i$ . Будем рассматривать движение МТ относительно инерциальной системы отсчета и ограничимся случаем, когда  $v_i \ll c$ . Тогда для МТ с номером  $i$  можно записать второй закон Ньютона

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_{i1} + \dots + \vec{F}_{ii-1} + \vec{F}_{ii+1} + \dots + \vec{F}_{i\mathcal{N}} + \vec{F}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{\mathcal{N}} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i. \quad (7.1)$$

Малое перемещение МТ и ее мгновенная скорость связаны известным кинематическим соотношением

$$\vec{v}_i dt = d\vec{r}_i. \quad (7.2)$$

Далее поступим так же, как при выводе теоремы о кинетической энергии, то есть почленно перемножим уравнения (7.1) и (7.2):

$$m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{\mathcal{N}} \vec{F}_{ij} d\vec{r}_i + \vec{F}_i d\vec{r}_i. \quad (7.3)$$

Сложим соотношения типа (7.3) для всех  $\mathcal{N}$  тел системы. С учетом простейших преобразований получаем

$$d \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{m_i \mathbf{V}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sum_{j=1, j \neq i}^{\mathcal{N}} \vec{F}_{ij} d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{F}_i d\vec{r}_i. \quad (7.4)$$

Левая часть (7.4) представляет собой приращение кинетической энергии механической системы  $dT$ . В правой части (7.4) первое слагаемое определяет работу всех внутренних сил по перемещению МТ  $dA^{\text{внутр}}$ . Хотя сумма всех внутренних сил, действующих в системе, в соответствии с третьим законом динамики равна нулю, очевидно, работа этих сил в общем случае отлична от нуля. Второе слагаемое в правой части (7.4) есть работа всех внешних сил по перемещению тел системы  $dA^{\text{внеш}}$ . Итак,

$$dT = dA^{\text{внутр}} + dA^{\text{внеш}}. \quad (7.5)$$

Если внутренние и внешние силы потенциальны, то совершаемая ими работа может быть выражена через изменение потенциальной энергии:

$$dA^{\text{внутр}} = -dU^{\text{внутр}}; \quad dA^{\text{внеш}} = -dU^{\text{внеш}}. \quad (7.6)$$

С учетом этого соотношение (7.5) приобретает следующий вид:

$$dT + dU^{\text{внутр}} + dU^{\text{внеш}} = d(T + U^{\text{внутр}} + U^{\text{внеш}}) = 0. \quad (7.7)$$

Введем понятие полной энергии механической системы:

$$\mathcal{E}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_{\mathcal{N}}, \vec{V}_1 \dots \vec{V}_{\mathcal{N}}) = T(\vec{V}_1 \dots \vec{V}_{\mathcal{N}}) + U^{\text{внутр}}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_{\mathcal{N}}) + U^{\text{внеш}}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_{\mathcal{N}}). \quad (7.8)$$

Функция  $U^{\text{внутр}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{\mathcal{N}})$  есть часть потенциальной энергии, обусловленная взаимодействием тел системы. Функция  $U^{\text{внеш}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{\mathcal{N}})$  определяет потенциальную энергию системы во внешних полях. Равенство (7.7) с учетом (7.8) является математическим выражением закона *сохранения механической энергии системы МТ во внешних стационарных полях*:

$$d\mathcal{E} = 0, \quad \mathcal{E} = \text{const}. \quad (7.9)$$

Напомним, что результат (7.9) был получен в предположении, что внутренние и внешние силы потенциальны, однако присутствие также иных сил, которые не совершают работу (см.

разд. 6.2), не приведет к нарушению соотношения (7.9). Поэтому закон сохранения энергии в механике может быть сформулирован следующим образом: *если в инерциальной системе отсчета в системе тел и на систему действуют потенциальные силы, а иные силы не совершают работу, то полная механическая энергия этой системы постоянна во времени.*

При наличии непотенциальных сил (внутренних и внешних) величина  $\mathcal{E}$  будет изменяться со временем, и это изменение определяется работой указанных сил:

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = A_{12}^{\text{нп}}. \quad (7.10)$$

**Пример.** Используя закон сохранения энергии, найти скорость цилиндра, скатывающегося по наклонной плоскости без проскальзывания с высоты  $H$  (рис. 7.1).

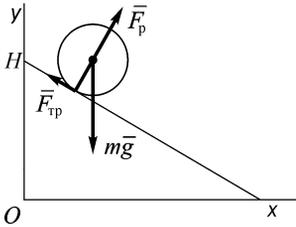


Рис. 7.1

$\vec{F}_p$  всегда перпендикулярна скорости цилиндра и работу не совершает. При отсутствии проскальзывания нет движения точки приложения силы трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  относительно наклонной поверхности, поэтому работа этой силы также равна нулю. Следовательно, механическая энергия системы постоянна. Так как масса Земли несравненно больше массы цилиндра, будем считать Землю неподвижной, а систему отсчета, связанную с Землей, инерциальной. Тогда закон сохранения механической энергии системы (см. разд. 6.4) имеет вид

$$\mathcal{E} = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_{cz}\omega^2}{2} + mgy = \text{const.}$$

Величину  $\mathcal{E}$  определим из начальных условий: при  $t = 0$  имеем  $y(0) = H$ ,  $v_c(0) = 0$ ,  $\omega(0) = 0$ . Получаем уравнение:

$$\frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_{cz}\omega^2}{2} = mg(H - y).$$

С учетом связи  $v_c = R\omega$  и выражения для момента инерции цилиндра  $I_{cz} = \frac{mR^2}{2}$  находим скорость центра масс цилиндра в нижней точке ( $y = 0$ ):

$$v_c = \sqrt{\frac{4}{3}gH}.$$

## 7.2. Закон сохранения импульса

Для отдельной МТ закон сохранения импульса является тривиальным следствием уравнения движения (3.2). Очевидно, что если на МТ не действуют силы, она движется относительно инерциальной системы отсчета с постоянным импульсом  $\vec{p} = \vec{p}_0$ . Обобщим этот вывод на систему МТ. Коль скоро мы опираемся на законы динамики, то движение  $\mathcal{N}$  тел механической системы будем рассматривать при тех же условиях, что и в разд. 7.1. Однако в данном разделе второй закон Ньютона для МТ с номером  $i$  мы запишем в наиболее общей форме:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\mathcal{N}} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i, \quad (7.11)$$

справедливой и в релятивистском случае, что снимает ограничения на скорости МТ.

Просуммируем уравнения вида (7.11) для всех тел системы и поменяем порядок суммирования и дифференцирования в левой части:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\mathcal{N}} \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{F}_i. \quad (7.12)$$

В левой части (7.12) мы имеем производную по времени от полного импульса механической системы  $\vec{P}$ . Двойная сумма в правой части выражения (7.12), как уже неоднократно отмечалось, равна нулю. Таким образом, мы приходим к заключению, что *производная по времени импульса системы МТ равна сумме внешних сил, действующих на систему*:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{внеш}}. \quad (7.13)$$

Соотношение (7.13) есть следствие второго и третьего законов динамики. Из (7.13) очевидно вытекает условие сохранения импульса системы:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{внеш}} = 0. \quad (7.14)$$

Итак, если векторная сумма внешних сил, действующих на систему, в любой момент времени равна нулю, то полный импульс этой системы постоянен во времени.

Закон сохранения импульса является векторным, поэтому он может быть сформулирован и для отдельных направлений в пространстве: если существует неподвижная ось (например, ось  $Ox$ ), для которой сумма проекций всех внешних сил в любой момент времени равна нулю, то компонента импульса вдоль этой оси постоянна во времени. Математически это можно записать следующим образом:

$$P_x = P_{x0} = \text{const}, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^N F_{ix} = 0. \quad (7.15)$$

Подчеркнем, что другие компоненты вектора  $\vec{P}$  ( $P_y$  и  $P_z$  в нашем примере) могут изменяться со временем. На практике при решении задач соотношение (7.15) выполняется гораздо чаще, чем (7.14).

Закон сохранения импульса предсказывает возможность ускорения отдельных тел системы за счет действия внутренних сил при обязательном сохранении полного импульса механической системы. Речь идет о так называемом *реактивном движении*, которое возникает при отделении от тела его частей, обладающих определенной скоростью относительно этого тела. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

### 7.3. Реактивное движение. Уравнение Мещерского

Пусть сумма внешних сил, действующих на тело, равна нулю, и из него в единицу времени выбрасывается часть массы

$$\mu = -\frac{dm}{dt} \quad (7.16)$$

со скоростью  $\vec{V}_1$  относительно тела. Импульс тела в момент времени  $t$  в инерциальной системе отсчета есть  $\vec{P}_0 = m(t)\vec{V}(t)$ . За малое время  $dt$  выброшена определенная масса  $dm$ , и ее импульс равен  $d\vec{P} = \mu dt(\vec{V} + \vec{V}_1)$ . При этом импульс тела изменится до величины  $\vec{P}_1 = (m - \mu dt)(\vec{V} + d\vec{V})$ , где  $d\vec{V}$  — изменение скорости тела. В соответствии с законом сохранения импульса

$$\vec{P}_0 = \vec{P}_1 + d\vec{P},$$

или

$$m\vec{V} = (m - \mu dt)(\vec{V} + d\vec{V}) + \mu dt(\vec{V} + \vec{V}_1). \quad (7.17)$$

После раскрытия скобок в (7.17) и пренебрежения членом второго порядка малости  $\mu d\vec{V}dt$  приходим к уравнению

$$m(t)\frac{d\vec{V}}{dt} = -\mu\vec{V}_1. \quad (7.18)$$

Величина в правой части носит название *реактивной силы*. Очевидно, что если  $\vec{V}_1$  имеет противоположное направление по отношению к  $\vec{V}$ , то происходит ускорение тела. Уравнение (7.18) можно обобщить и на случай неизолированного тела:

$$m(t)\frac{d\vec{V}}{dt} = -\mu\vec{V}_1 + \vec{F}, \quad (7.19)$$

где  $\vec{F}$  — равнодействующая внешних сил. При движении реактивных систем вблизи Земли роль силы  $\vec{F}$  играют силы тяжести и сопротивления воздуха. В форме (7.19) полученное соотношение носит название уравнения Мещерского.

#### 7.4. Закон сохранения момента импульса

Ранее (разд. 4.2) для системы МТ было получено уравнение моментов, связывающее производную по времени момента импульса системы с моментом внешних сил, действующих на систему тел:

$$\dot{\vec{M}} = \vec{N}^{\text{внеш}},$$

$$\text{где } \vec{M} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} [\vec{r}_i \vec{p}_i]; \quad \vec{N}^{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} [\vec{r}_i \vec{F}_i].$$

Из приведенного уравнения следует, что *если в любой момент времени сумма моментов внешних сил, действующих на тела системы, относительно неподвижной точки пространства равна нулю, то момент импульса этой системы постоянен во времени.* Это и есть формулировка закона сохранения момента импульса. Так как приведенный закон является векторным, то он может выполняться относительно одной оси при условии, что алгебраическая сумма моментов внешних сил относительно этой неподвижной оси равна нулю. То есть

$$\text{если } \sum_{i=1}^N N_{zi}^{\text{внеш}} = 0, \text{ то } M_z = M_{z0} = \text{const.} \quad (7.20)$$

В частности, для твердого тела, закрепленного на неподвижной оси,  $M_z = I_z \omega$ , и при соблюдении условий (7.20) величина  $M_z$  будет постоянной при возможных изменениях момента инерции  $I_z$ . Подчеркнем, что кинетическая энергия при этом непостоянна, ибо (см. разд. 6.4)

$$T = \frac{M_z^2}{2I_z}.$$

Изменение величины  $T$  при вариациях  $I_z$  определяется работой внутренних сил механической системы.

**Пример.** Человек массой  $m_{\text{ч}}$  переходит из центра вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  горизонтальной круглой платформы радиуса  $R$  и массой  $m_{\text{пл}}$  на ее край. Найти угловую скорость вращения системы в новом состоянии и изменение кинетической энергии. Человека принять за МТ. Трением в оси платформы пренебречь.

*Решение.* Момент внешних сил относительно оси вращения  $Oz$   $N_z = 0$ , следовательно, момент импульса системы «платформа плюс человек»  $M_z$  постоянен во времени:

$$M_z = I_{\text{пл}} \omega = I_{\text{пл}} \omega_1 + m_{\text{ч}} R^2 \omega_1;$$

$$I_{\text{пл}} = \frac{m_{\text{пл}} R^2}{2};$$

$$\omega_1 = \frac{I_{\text{пл}} \omega}{I_{\text{пл}} + m_{\text{ч}} R^2} = \frac{M_{\text{пл}} \omega}{M_{\text{пл}} + 2m_{\text{ч}}};$$

$$\Delta T = \frac{M_z^2}{2} \left( \frac{1}{I_{\text{пл}} + m_{\text{ч}} R^2} - \frac{1}{I_{\text{пл}}} \right) = - \frac{m_{\text{ч}} m_{\text{пл}} R^2 \omega^2}{M_{\text{пл}} + 2m_{\text{ч}}}.$$

Кинетическая энергия системы уменьшилась за счет работы, совершенной при перемещении человека против центростремительной силы.

### 7.5. Комментарии к теме «Законы сохранения в механике»

В этом разделе мы еще раз остановимся на принципиальных моментах рассматриваемой темы.

1. Мы предполагали, что силы, действующие на тела механической системы, явно не зависят от времени, то есть рассматривали только стационарные силовые поля.

2. Так как законы сохранения выводились из законов динамики, анализ движения проводился относительно инерциальных систем отсчета.

3. Каждый закон сохранения включает в себя строго определенные условия.

4. Часто говорят, что законы сохранения в механике выполняются для так называемых замкнутых механических систем. Напомним, что система называется замкнутой или изолированной, если на нее не действуют внешние силы. Очевидно, для таких систем соблюдаются необходимые условия для законов сохранения импульса и момента импульса. Однако для сохранения механической энергии необходимо потребовать еще, чтобы внутренние силы были потенциальными. Мы же сформулировали этот закон в наиболее общем виде, учитывающем потенциальную энергию тел системы во внешних полях, то есть для незамкнутых систем.

5. Если законы сохранения есть следствие законов Ньютона, то что нового они могут дать при рассмотрении движения тел? В ряде задач конкретный вид зависимости сил от координат тел системы неизвестен, однако ясно, что силы действуют достаточно короткое время. В этом случае динамический путь решения задач механики неприемлем. Однако применение законов сохранения позволяет по начальным параметрам механической системы определить ее состояние после окончания действия сил. Так, в частности, решаются задачи о столкновении тел и ряд других.

## § 8. ПОНЯТИЕ О ТЕНЗОРЕ ИНЕРЦИИ

При рассмотрении вращательного и плоского движений твердого тела мы установили жесткую связь между моментом импульса относительно оси и угловой скоростью  $M_z = I_z \omega$ . В ряде задач механики оказывается необходимым связать вектор момента импульса твердого тела  $\vec{M}$  относительно точки пространства с вектором угловой скорости  $\vec{\omega}$ . Простейший пример показывает, что в общем случае эта связь достаточно сложна. Пусть МТ движется по окружности (рис. 8.1). Очевидно, вектор момента импульса этой точки  $\vec{M} = [\vec{r} m \vec{v}]$  не будет параллелен  $\vec{\omega}$ . Легко сообразить, что рассматриваемые векторы будут параллельны при вращении системы вокруг оси симметрии (например, при вращении двух МТ, связанных жестким стержнем (рис. 8.2)). Действительно, результирующий момент импульса

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = [\vec{r}_1 m \vec{v}_1] + [\vec{r}_2 m \vec{v}_2] = \\ &= \{[\vec{r}_1 \vec{v}_1] - [\vec{r}_2 \vec{v}_1]\} m = [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \vec{v}_1] m = [\vec{r}_{21} \vec{v}_1] m. \end{aligned}$$

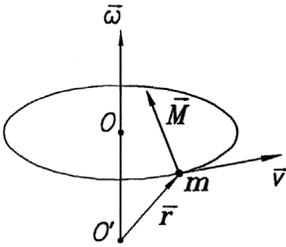


Рис. 8.1

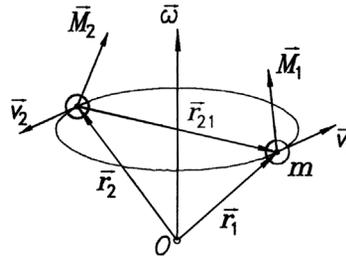


Рис. 8.2

Так как векторы  $\vec{r}_{21}$  и  $\vec{v}_1$  лежат в плоскости вращения, их векторное произведение будет направлено вдоль оси вращения, и, следовательно,  $\vec{M} \parallel \vec{\omega}$ .

### 8.1. Связь векторов $\vec{M}$ и $\vec{\omega}$ в общем случае

Пусть твердое тело закреплено в одной точке  $O$ . Там же мы поместим начало декартовой системы координат (рис. 8.3).

Используем обычный прием, разбив ТТ на макроскопические части, и запишем выражение для момента импульса элемента с номером  $i$ :

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i \Delta m_i \vec{V}_i] = [\vec{r}_i [\vec{\omega} \vec{r}_i]] \Delta m_i, \quad (8.1)$$

Полученное двойное векторное произведение преобразуем в соответствии с известным тождеством

$$[\vec{A}[\vec{B}\vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\vec{B}). \quad (8.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{M}_i &= \vec{\omega}(\vec{r}_i \vec{r}_i) \Delta m_i - \vec{r}_i(\vec{r}_i \vec{\omega}) \Delta m_i = \\ &= \vec{\omega} r_i^2 \Delta m_i - \vec{r}_i(x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \Delta m_i. \end{aligned} \quad (8.3)$$

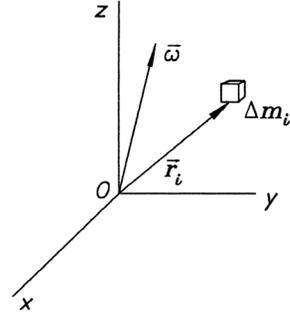


Рис. 8.3

С учетом (8.3) выпишем выражения для проекций вектора  $\vec{M}$  через компоненты вектора  $\vec{\omega}$ :

$$\left. \begin{aligned} M_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\ M_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\ M_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \end{aligned} \right\}, \quad (8.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= \sum_i (r_i^2 - x_i^2) \Delta m_i \\ I_{yy} &= \sum_i (r_i^2 - y_i^2) \Delta m_i \\ I_{zz} &= \sum_i (r_i^2 - z_i^2) \Delta m_i \end{aligned} \right\}, \quad (8.5)$$

$$\left. \begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = -\sum_i x_i y_i \Delta m_i \\ I_{xz} &= I_{zx} = -\sum_i x_i z_i \Delta m_i \\ I_{yz} &= I_{zy} = -\sum_i y_i z_i \Delta m_i \end{aligned} \right\}. \quad (8.6)$$

Приведенные выше коэффициенты с одинаковыми индексами (8.5) называют *осевыми моментами инерции*, а коэффициенты с различными индексами (8.6) — *центробежными моментами инерции*. Все коэффициенты можно представить в виде таблицы из 9 чисел:

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Эта таблица представляет собой *тензор инерции твердого тела*. С ее помощью в соответствии с (8.4) можно связать проекции векторов  $\vec{M}$  и  $\vec{\omega}$ . Коэффициенты с одинаковыми индексами называют диагональными элементами тензора.

## 8.2. Главные оси инерции

Проведя преобразование координат, тензор (8.7) можно привести к так называемому диагональному виду, когда все коэффициенты с различными индексами равны нулю:

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}. \quad (8.8)$$

Тогда проекции вектора момента импульса можно выразить через соответствующие проекции угловой скорости:

$$M_x = I_{xx}\omega_x; \quad M_y = I_{yy}\omega_y; \quad M_z = I_{zz}\omega_z. \quad (8.9)$$

Однако и в этом случае векторы  $\vec{M}$  и  $\vec{\omega}$  могут быть непараллельными. Только если вращение происходит вокруг одной из данных осей координат, указанные векторы являются параллельными.

Оси координат, в которых тензор инерции имеет диагональный вид, называются *главными осями инерции*. В курсе тензорного анализа доказывается, что для любого положения точки

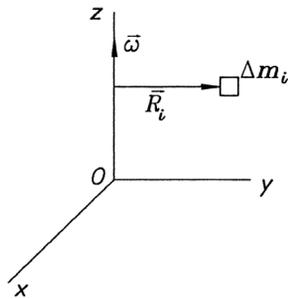


Рис. 8.4

$O$  можно найти такие направления координатных осей, для которых центробежные моменты инерции равны нулю. Если точка  $O$  совпадает с центром масс тела, то оси называют *центральными главными осями инерции*.

Если тело вращается вокруг одной из главных осей, например  $Oz$  (рис. 8.4), то момент импульса тела относительно начала координат

$$\vec{M} = I_{zz}\vec{\omega},$$

где 
$$I_{zz} = \sum_i (r_i^2 - z_i^2)\Delta m_i = \sum_i (x_i^2 + y_i^2)\Delta m_i = \sum_i R_i^2\Delta m_i,$$

совпадает с рассмотренным в разд. 4.3 моментом инерции относительно оси. Отсюда понятен термин «осевой момент инерции».

Определение направления главных осей инерции в общем случае представляет собой сложную математическую задачу. Часто используют для этого более простые соображения симме-

трии. Так, для цилиндра главными центральными осями будут ось симметрии и две любые взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс и перпендикулярные к оси симметрии; для шара — любые три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс.

### 8.3. Свободные оси вращения

При рассмотрении вращательного и плоского движений направление оси удерживалось в пространстве за счет подшипников крепления и плоскости качения соответственно. Однако часто тела движутся в пространстве свободно, и при этом возникает вопрос: могут ли они вращаться устойчиво, то есть сохраняя в пространстве ориентацию оси вращения?

Определенный ответ на этот вопрос можно получить анализируя простой пример. Рассмотрим твердое тело, представляющее собой две МТ, жестко связанные невесомым стержнем, который в свою очередь закреплен на оси  $O_1O_2$ , фиксированной в подшипниках (рис. 8.5). Вся система вращается с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . На стержень со стороны МТ действуют силы  $f_1 = m_1 r_1 \omega^2$  и  $f_2 = m_2 r_2 \omega^2$ . Чтобы удержать ось в пространстве, со стороны подшипников на нее действуют силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ . Ось вращения будет сохранять свое положение в пространстве в отсутствие крепления тогда, когда  $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = 0$ . Это условие выполняется, если сумма сил  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$  равна нулю и сумма моментов этих сил относительно оси, перпендикулярной плоскости, в которой лежат ось  $O_1O_2$  и стержень, равна нулю.

Из первого условия следует

$$m_1 r_1 = m_2 r_2,$$

что по определению соответствует положению центра масс системы в точке  $O$ .

Моменты сил  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$  имеют одинаковый знак:

$$N_z = f_1 d_1 + f_2 d_2$$

и обращаются в нуль лишь при  $d_1 = d_2 = 0$ .

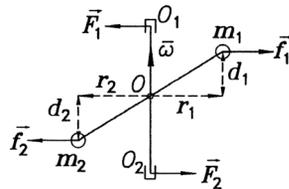


Рис. 8.5

Таким образом, для устойчивого вращения рассматриваемого ТТ в отсутствие связей необходимо, чтобы стержень был перпендикулярен оси вращения и чтобы точка соединения оси и стержня совпадала с центром масс системы.

Введем систему координат с началом в точке  $O$  и выразим проекции вектора момента импульса относительно этой точки через угловую скорость (рис. 8.6):

$$M_x = I_{xx}\omega_x; \quad M_y = I_{yy}\omega_y; \quad M_z = I_{zz}\omega_z.$$

Очевидно, так как координаты МТ  $z_1 = z_2 = 0$ , центробежные моменты  $I_{xz}$  и  $I_{yz}$  равны нулю. Поэтому  $M_x = M_y = 0$ , и вектор момента импульса ТТ  $\vec{M}$  параллелен вектору  $\vec{\omega}$ . Следовательно, *свободной осью вращения является центральная главная ось инерции твердого тела*. Компонента тензора

$$I_{zz} = m_1(x_1^2 + y_1^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2) = m_1r_1^2 + m_2r_2^2$$

представляет собой момент инерции рассматриваемого ТТ относительно оси  $Oz$ .

Более детальный анализ рассматриваемого типа движения, выходящий за рамки настоящей книги, свидетельствует о том, что степень устойчивости свободной оси вращения зависит от соотношения главных моментов инерции тела. В частности, если последние различны и выполняется условие

$$I_{xx} < I_{yy} < I_{zz},$$

то вращение будет устойчивым для осей с наибольшим ( $Oz$ ) и наименьшим ( $Ox$ ) моментами инерции. Напротив, положение оси  $Oy$  легко изменяется под действием случайных факторов.

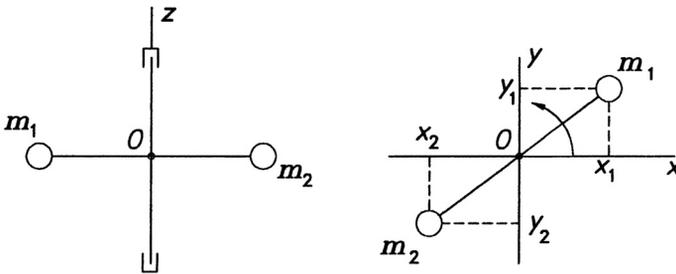


Рис. 8.6

## § 9. ГИРОСКОП

Рассмотренные выше законы динамики движения твердого тела позволяют объяснить весьма необычное поведение быстро вращающихся тел — гироскопов. Уточним, что гироскопом называют аксиально-симметричное тело, приведенное в очень быстрое вращение вокруг своей оси симметрии (критерий «быстрое» будет определен ниже). Целесообразно проанализировать два случая: когда сумма моментов внешних сил, действующих на гироскоп, равна нулю и когда к гироскопу приложена постоянная сила, направление действия которой не проходит через его центр масс, то есть сила, создающая постоянный момент относительно центра масс.

### 9.1. Свободный гироскоп

Гироскоп можно рассматривать как практически свободный, если он закреплен в так называемом кардановом подвесе. Последний позволяет ему вращаться вокруг трех взаимно перпендикулярных осей, причем все они пересекаются в центре масс тела — точке  $O$  на рис. 9.1. В пренебрежении трением в осях шарниров и аэродинамическими потерями можно считать, что относительно точки  $O$  сумма моментов внешних сил, действующих на гироскоп, равна нулю. Следовательно, его момент импульса относительно неподвижной точки в инерциальной системе отсчета постоянен во времени. Ось симметрии гироскопа является центральной главной осью, то есть свободной осью вращения. С учетом того, что любой гироскоп конструируется так, что этой оси соответствует наибольший момент инерции, становится очевидным, что положение оси вращения гироскопа устойчиво по отношению к инерциальной системе отсчета.

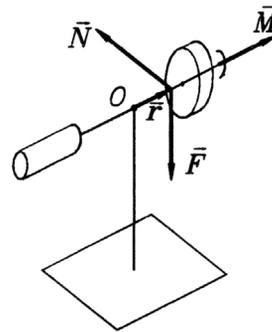


Рис. 9.1

Даже при наличии кратковременных силовых воздействий на гироскоп ось гироскопа сохраняет свою ориентацию в пространстве. Действительно, если  $\vec{M}$  — момент импульса гироскопа,  $\vec{N}$  — момент внешних сил,  $\tau$  — время воздействия, то приращение момента импульса

$$\Delta \vec{M} = \int_0^{\tau} \vec{N}(t) dt \ll \vec{M} \quad (9.1)$$

при достаточно малом значении  $\tau$ .

В устойчивом положении оси гироскопа в пространстве легко убедиться, взяв за основание карданов подвес и перемещая его в различных направлениях. Это замечательное свойство гироскопа широко используется в навигационных приборах — гироскопах, гиригоризонтах и т.д. В реальных технических устройствах скорость вращения гироскопа достигает 100 тысяч оборотов в минуту. Очевидно, такие устройства, в отличие от магнитного компаса, могут работать в движущихся самолете, ракете, космическом аппарате.

## 9.2. Движение гироскопа под действием внешней силы

Весьма неожиданно гироскоп реагирует на длительное действие внешней силы, момент которой относительно его центра масс отличен от нуля. В отсутствие вращения поворот гироскопа, а следовательно, и его оси симметрии происходил бы в направлении действия силы. Ситуация принципиально меняется, если гироскоп приведен в быстрое вращение. Пусть направление внешней силы перпендикулярно моменту импульса гироскопа  $\vec{M}$  и соответствует схематичному рисунку 9.1.

В соответствии с соотношением (4.8)

$$d\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}] dt = \vec{N} dt. \quad (9.2)$$

Изобразим вектор момента импульса гироскопа в моменты времени  $t$  и  $t + dt$  (рис. 9.2).

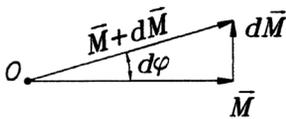


Рис. 9.2

Так как вектор  $d\vec{M}$  перпендикулярен  $\vec{M}$ , то под действием внешней силы  $\vec{F}$  происходит поворот вектора  $\vec{M}$  в направлении вектора момента силы  $\vec{N}$ , то есть в направлении, перпендикулярном

этой силе. Такое движение называется *прецессией* гироскопа, и угловая скорость прецессии (см. рис. 9.2)

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dM}{M dt} = \frac{N}{M}. \quad (9.3)$$

До настоящего момента мы не делали никаких упрощающих предположений. Однако ситуация заметно усложнилась по

сравнению со свободным гироскопом. Для последнего векторы  $\vec{M}$  и  $\vec{\omega}$  сонаправлены:

$$\vec{M} = I_z \vec{\omega}, \quad (9.4)$$

где  $I_z$  — момент инерции относительно оси вращения.

Теперь же вращение происходит с угловой скоростью  $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$ , и, следовательно, векторы  $\vec{M}$  и  $\vec{\omega}$  не параллельны, то есть поворот вектора  $\vec{M}$  уже не описывает поворот *оси* гироскопа.

В приближенной теории гироскопа рассматривается случай, когда угловая скорость прецессии много меньше угловой скорости вращения гироскопа:

$$\Omega \ll \omega. \quad (9.5)$$

При этом можно опять положить

$$\vec{M} \approx I_z \vec{\omega} \quad (9.6)$$

и отождествить поворот вектора  $\vec{M}$  с вращением оси гироскопа. Из соотношений (9.3)–(9.5) легко получить критерий «быстрого вращения» гироскопа:

$$\omega \gg \sqrt{\frac{N}{I_z}}. \quad (9.7)$$

Еще одной особенностью прецессионного движения гироскопа является его безынерционность: поворот оси вращающегося тела мгновенно прекращается, как только перестает действовать внешняя сила.

Интересно отметить, что гироскопические эффекты проявляются и в микромире. Это связано с наличием у микрочастиц собственного механического момента импульса (спина). Для электронов в атоме помимо спинового появляется момент импульса, связанный с орбитальным движением. Механические моменты микрочастиц дискретны:

$$M_z = n\hbar, \quad (9.8)$$

где  $\hbar \approx 10^{-34}$  Дж·с, причем  $n = 1/2$  для спина электрона, протона и нейтрона,  $n = 1$  для спина фотона и  $n = 1, 2, 3, \dots$  при орбитальном движении электрона. При помещении вещества во внешнее магнитное поле на микрочастицы, обладающие магнитным моментом (электроны и ядро атома), действует момент сил, обуславливающий прецессию этих частиц. Такие движения являются причиной явления намагничивания среды.

## *Часть II*

# ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

### ВВЕДЕНИЕ

При рассмотрении данного раздела условно выделяют три группы вопросов. К первой относятся основные понятия и законы, управляющие электрическими и магнитными явлениями; ко второй — электрические и магнитные свойства вещества и к третьей — технические приложения. В настоящем курсе мы уделим основное внимание вопросам первой группы. Для последовательного изложения вопросов второй группы необходимо привлечение представлений механики микромира, то есть квантовой теории. Поэтому мы ограничимся достаточно формальным рассмотрением электромагнитных свойств вещества, опираясь на классическое приближение. Технические применения электричества будут обсуждаться лишь как примеры проявления тех или иных фундаментальных законов.

Опыт показывает, что как между электрически заряженными телами, так и между телами, по которым текут электрические токи, действуют силы, называемые электромагнитными. Относительно природы этих сил в истории науки выдвигались две противоположные точки зрения. Более старая из них исходила из представления о непосредственном действии тел на расстоянии без каких бы то ни было материальных посредников, то есть считалось, что скорость распространения взаимодействия бесконечна (теория дальнего действия). Современное воззрение, базирующееся на обобщении имеющихся экспериментальных данных, предполагает, что взаимодействие передается с конечной скоростью посредством особой материальной субстанции, называемой электромагнитным полем (теория ближнего действия).

Мы начнем свое изложение электромагнитных явлений со случая неподвижных электрических зарядов. Они создают неизменное во времени электрическое поле, называемое электростатическим.

## § 10. ЗАКОН КУЛОНА. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

### 10.1. Электрический заряд

Важнейшим понятием учения об электричестве является заряд. Электрические заряды бывают двух типов, которые условно называют положительными и отрицательными. Их носителями служат элементарные частицы протон и электрон соответственно. Эти частицы наряду с нейтроном входят в состав всех атомов. Заряд протона и электрона одинаков по модулю, равен  $1,6 \cdot 10^{-19}$  кулона и называется элементарным зарядом. Единицей измерения заряда  $q$  в системе СИ является кулон (Кл), который представляет собой производную от основных единиц: ампера (определение будет дано в разд. 17.3) и секунды ( $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с}$ ).

Для дальнейшего нам важно зафиксировать два следующих положения, прошедших экспериментальную проверку.

1. Заряд тела не зависит от выбора инерциальной системы отсчета, в которой он измеряется. Говорят, что заряд инвариантен относительно перехода от одной инерциальной системы к другой.

2. Суммарный заряд электрически изолированной системы, то есть системы, ограниченной поверхностью, через которую не могут проникать заряженные частицы, постоянен во времени. Это утверждение является формулировкой фундаментального закона сохранения заряда.

### 10.2. Закон Кулона

Из опыта известно, что заряды одного знака отталкиваются, а противоположных знаков притягиваются. Для выяснения количественной зависимости силы взаимодействия зарядов от расстояния между ними необходимо ввести понятие точечного заряда, то есть такого заряженного тела, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями от этого тела до других тел, несущих электрический заряд. Очевидно, что только для точечных зарядов можно строго определить расстояние между ними, их положение относительно выбранной системы отсчета и т.д.

На основе тонких кропотливых опытов Ш. Кулон в 1785 г. установил закон взаимодействия зарядов, согласно которому

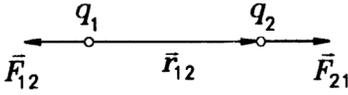


Рис. 10.1

сила взаимодействия  $F$  двух неподвижных точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды, пропорциональна их абсолютным

величинам  $|q_1|$  и  $|q_2|$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними  $r_{12}$  (рис. 10.1). Указанная сила является силой притяжения, если знаки зарядов различные, и силой отталкивания, если эти знаки одинаковы (на рис. 10.1 приведен случай одноименных зарядов):

$$F_{12} = k \frac{|q_1||q_2|}{r_{12}^2}, \quad (10.1)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц. Так, в системе единиц СИ

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (10.2)$$

где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м — размерный коэффициент, называемый диэлектрической постоянной; Ф — фарад — единица емкости, определение которой будет дано в разд. 15.3.

Если заряды помещены в однородную жидкую или газообразную диэлектрическую среду, то сила взаимодействия между ними ослабляется в  $\epsilon$  раз, где  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды:

$$F_{12} = k \frac{|q_1||q_2|}{\epsilon r_{12}^2}. \quad (10.3)$$

На физической причине ослабления взаимодействия зарядов мы остановимся позже (§ 14).

Записи закона Кулона можно придать векторный вид, то есть задать не только величину силы взаимодействия зарядов, но и ее направление:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{\epsilon r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}. \quad (10.4)$$

Очевидно, что в соответствии с третьим законом Ньютона

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}.$$

Сделаем важное замечание. Неверно было бы считать, что соотношение (10.4) представляет собой наиболее общую форму записи закона Кулона. Действительно, формула (10.4) применима только для случая однородных жидких и газообразных диэлектрических сред. Если же заряды  $q_1$  и  $q_2$  помещены в твердый диэлектрик, то сила взаимодействия между ними будет зависеть от формы полости, в которой расположен каждый из зарядов.

### 10.3. Напряженность электрического поля

Как мы уже отмечали, современная точка зрения на электрическое взаимодействие основана на концепции электромагнитного поля. В рамках электростатики, то есть физики неподвижных зарядов, взаимодействие между такими зарядами осуществляется посредством электрического поля. Основное свойство такого поля заключается в том, что на внесенный в область существования поля электрический заряд *действует сила*.

Для исследования свойств рассматриваемого поля можно воспользоваться так называемым *пробным зарядом*  $q_{\text{пр}}$ . Для того чтобы последний характеризовал электрическое поле в данной точке пространства, он должен быть точечным. Если среди заряженных тел, создающих электрическое поле, имеются протяженные проводники, то для того, чтобы уменьшить неизбежное перераспределение зарядов на этих проводниках при приближении к ним пробного заряда, величина  $q_{\text{пр}}$  должна быть минимально возможной.

Пусть электрическое поле в вакууме создается неподвижным точечным зарядом  $q$ . Тогда сила, действующая на пробный заряд, в соответствии с законом Кулона равна (рис. 10.2)

$$\vec{F}_{\text{пр}}(\vec{r}) = q_{\text{пр}} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right), \quad (10.5)$$

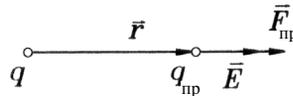


Рис. 10.2

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный от заряда  $q$  в точку расположения  $q_{\text{пр}}$ .

Отношение  $\vec{F}_{\text{пр}}/q_{\text{пр}}$ , очевидно, не зависит от величины  $q_{\text{пр}}$  и может служить характеристикой *самого электрического поля* в точке расположения пробного заряда. Ее называют *напряженностью электрического поля*:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{\text{пр}}(\vec{r})}{q_{\text{пр}}}. \quad (10.6)$$

Напряженность поля точечного заряда в вакууме

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (10.7)$$

В жидкой или газообразной диэлектрической среде напряженность электрического поля будет ослаблена в  $\epsilon$  раз:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{\text{пр}}(\vec{r})}{q_{\text{пр}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\epsilon r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (10.8)$$

Величина  $\vec{E}$  в твердом диэлектрике будет зависеть от формы полости, в которую помещен пробный заряд.

Хотя мы пришли к понятию напряженности электрического поля на примере точечного заряда, отношение силы к величине пробного заряда не зависит от величины этого заряда и для полей, создаваемых системой зарядов любой конфигурации.

В заключение этого раздела сформулируем следующее определение: *напряженностью электрического поля в данной точке пространства называется отношение силы, действующей на пробный точечный заряд, помещенный в эту точку, к величине этого заряда.*

Очевидно,  $\vec{E}$  — силовая характеристика электрического поля. Задав ее как функцию координат, мы можем определить силу, действующую со стороны поля на любой точечный заряд  $q$ :

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}). \quad (10.9)$$

Единицей измерения напряженности электрического поля  $E$  в системе СИ является вольт на метр (В/м). Определение вольта будет дано в разд. 12.1.

#### 10.4. Принцип суперпозиции

Из опыта следует, что если в вакууме существует  $\mathcal{N}$  заряженных точечных тел, причем каждое из этих тел в *отсутствии остальных тел* действует на пробный заряд с силами

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_{\mathcal{N}},$$

то вся система действует на заряд с силой, равной векторной сумме  $\vec{F}_i$ :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{F}_i(\vec{r}). \quad (10.10)$$

Если выражение (10.10) поделить почленно на величину  $q_{\text{пр}}$ , то получим аналогичную формулу для напряженности электрического поля, создаваемого группой рассматриваемых тел:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{E}_i(\vec{r}). \quad (10.11)$$

Соотношение (10.11) носит название *принципа суперпозиции* для электрических полей. Если тела являются точечными зарядами, то напряженность результирующего поля в вакууме в точке  $A$

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i}, \quad (10.12)$$

где  $\vec{r}_i$  — радиус-вектор, проведенный от заряда с номером  $i$  в точку наблюдения  $A$ .

В том случае, когда заряды расположены на протяженных телах, для нахождения напряженности электрического поля указанные тела необходимо разбить на малые участки, являющиеся точечными зарядами, и применить формулу (10.12). При непрерывном распределении заряда в теле сумма (10.12) переходит в интеграл. Обычно для такого перехода вводится понятие плотности заряда. Если заряженное тело одномерно (заряженная нить (рис. 10.3)), то удобно использовать линейную плотность заряда, равную заряду, приходящемуся на единицу длины тела:

$$\lambda = \frac{dq}{dl}. \quad (10.13)$$

Тогда величина  $\vec{E}$  в интересующей нас точке  $A$  может быть выражена через интеграл:

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda \vec{r} dl}{r^3}, \quad (10.14)$$

причем интегрирование ведется вдоль заряженной нити. При распределении заряда по поверхности или объему тела вводятся соответственно поверхностная и объемная плотности заряда:

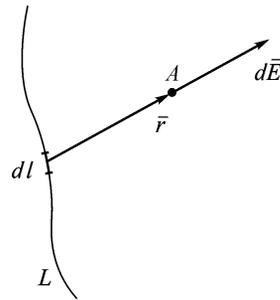


Рис. 10.3

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \quad \rho = \frac{dq}{dV}. \quad (10.15)$$

Для нахождения вектора  $\vec{E}_A$  используются соотношения

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma \vec{r}}{r^3} dS, \quad (10.16)$$

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dV, \quad (10.17)$$

где интегрирование ведется по заряженным поверхностям (10.16) или объему (10.17) тела.

Отметим, что, хотя при написании выражений (10.14), (10.16) и (10.17) мы не накладывали никаких ограничений на форму заряженных тел, аналитически выполнить расчет можно лишь для простейших случаев тел, обладающих плоской, осевой (цилиндрической) и сферической симметрией. Приведем пример таких вычислений.

**Пример.** Требуется найти напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженным тонким стержнем длиной  $2a$  на расстоянии  $R$  от его середины. Плотность заряда на стержне  $\lambda > 0$ .

*Решение.* Введем ось координат  $Ox$ . Выделим на стержне малый элемент  $dx$ . Из точки наблюдения он представляется точечным зарядом величиной  $\lambda dx$ .

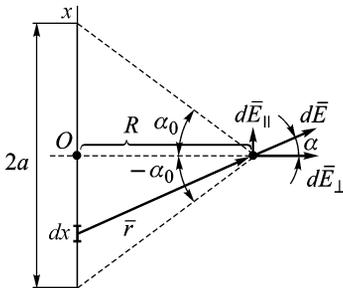


Рис. 10.4

Напряженность электрического поля  $d\vec{E}$ , создаваемого в точке наблюдения только этим элементом, определяется соотношением (10.7). В соответствии с принципом суперпозиции электрических полей результирующая напряженность будет определяться вкладом всех элементов. При интегрировании вдоль проводника, очевидно, будут складываться векторы  $d\vec{E}$  различ-

ного направления. Разложим каждый вектор на две компоненты —  $d\vec{E}_{\perp}$  и  $d\vec{E}_{\parallel}$  (рис. 10.4):

$$\vec{E} = \int_L d\vec{E} = \int_L d\vec{E}_{\perp} + \int_L d\vec{E}_{\parallel}.$$

В силу симметрии задачи сумма векторов  $d\vec{E}_{\parallel}$  от всех участков стержня равна нулю, и задача существенно упрощается:

$$\vec{E} = \int_L d\vec{E}_{\perp}.$$

Так как теперь складываются только сонаправленные векторы  $d\vec{E}_{\perp}$ , то можно перейти к суммированию их модулей:

$$E = \int_L dE_{\perp} = \int_L \cos \alpha \cdot dE = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\cos \alpha dx}{r^2}. \quad (10.18)$$

Для интегрирования перейдем к одной переменной — углу  $\alpha$ :

$$x = R \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда 
$$dx = \frac{R}{\cos^2 \alpha} d\alpha.$$

Подставляя в (10.18)  $r^2 = R^2 / \cos^2 \alpha$ , получаем

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \sin \alpha_0,$$

где 
$$\sin \alpha_0 = \frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}}.$$

Отсюда 
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}}.$$

Если стержень очень длинный (бесконечный:  $l \rightarrow \infty$ ), то

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}. \quad (10.19)$$

До настоящего времени мы обсуждали принцип суперпозиции для зарядов, расположенных в вакууме. В этих условиях он выполняется для любых значений напряженности электрических полей. Однако ситуация существенно усложняется, если заряды помещены в какую-либо диэлектрическую среду. Оказывается, начиная с некоторых значений модуля вектора  $\vec{E}$ , такая характеристика среды, как диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ , перестает быть постоянной и начинает зависеть от  $E$ . Для таких полей результирующая напряженность электрического поля уже не будет равна сумме напряженностей полей, создава-

емых зарядами по отдельности, то есть принцип суперпозиции нарушается. Для обычных диэлектриков такое нарушение наблюдается при напряженности, сопоставимой с внутриатомной:  $E_{ат} \sim 5 \cdot 10^{11}$  В/м.

Это очень большая величина. Напомним, что в статике диэлектрики без пробоя выдерживают поля до  $10^9$  В/м, так что отклонения от принципа суперпозиции в таких веществах не наблюдаются. Однако существуют материалы, называемые сегнетоэлектриками, для которых  $\epsilon$  зависит от напряженности поля начиная практически с нулевых значений. В таких кристаллах уже в электростатике проявляются эффекты, обусловленные нарушением принципа суперпозиции и называемые *нелинейными эффектами*.

### 10.5. Линии электрического поля

Для наглядного описания любых векторных полей (напряженности электрического поля, индукции магнитного поля, плотности электрического тока и т.д.) используется графическое изображение с помощью так называемых *линий поля*. Для произвольной векторной функции  $\vec{A}(x, y, z)$  указанные линии проводятся так, что вектор  $\vec{A}$  касателен к ним в любой точке, тем самым определяется его направление (рис. 10.5). Модуль вектора в данной точке пространства можно задать, если проводить линии поля так, что их число, пересекающее плоскую поверхность единичной площади, перпендикулярную  $\vec{A}$ , будет пропорционально  $|\vec{A}|$ . Следовательно, там, где плотность линий больше, выше и значение модуля вектора  $\vec{A}$  ( $|\vec{A}_1| > |\vec{A}_2|$  на рис. 10.5).

Возвращаясь к электростатическому полю, в качестве примера приведем картину линий вектора  $\vec{E}$  для различных систем

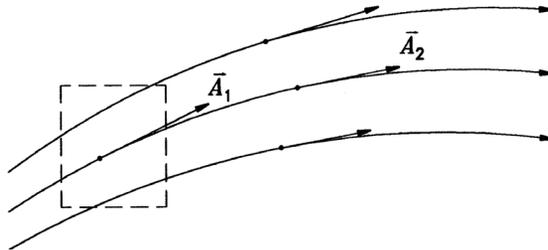


Рис. 10.5

зарядов. Так, одиночный точечный заряд характеризуется радиально направленными линиями вектора  $\vec{E}$ , причем структура линий обладает сферической симметрией (рис. 10.6).



Рис. 10.6

Для системы из двух точечных зарядов картина линий обладает осевой симметрией, причем ось симметрии проходит через эти заряды (рис. 10.7).

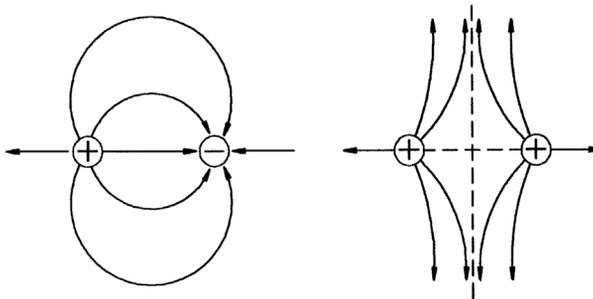


Рис. 10.7

Наконец, для двух параллельных заряженных пластин вдали от краев пластин линии электрического поля соответствуют плоской симметрии (рис. 10.8).

Как видно из рис. 10.6–10.8, линии электростатического поля *не замкнуты*: они начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных. Такой характер линий  $\vec{E}$  обусловлен *потенциальностью* электростатических сил.

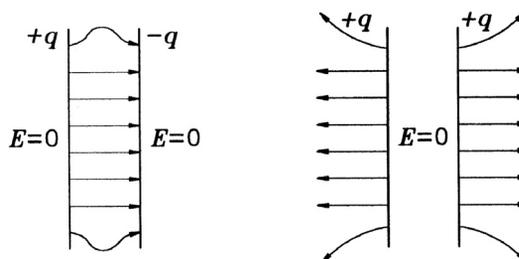


Рис. 10.8

## § 11. ТЕОРЕМА ГАУССА

Из закона Кулона и принципа суперпозиции вытекает одна из важнейших теорем электростатики — теорема Гаусса. Оказывается, что при использовании этой теоремы существенно упрощается решение задач о нахождении вектора  $\vec{E}$  для электрических полей, созданных протяженными заряженными телами с плоской, осевой и сферической симметрией распределения заряда. Для формулировки теоремы необходимо ввести понятие *потока вектора*.

### 11.1. Поток произвольного векторного поля

*Потоком* любого векторного поля  $\vec{A}(x, y, z)$  через бесконечно малую площадку  $dS$  называется скалярная величина, равная произведению модуля вектора  $A$  на  $dS$  и на косинус угла  $\alpha$  между  $\vec{A}$  и нормалью к площадке  $dS$  (рис. 11.1):

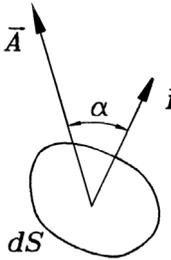


Рис. 11.1

$$d\Phi_A = AdS \cos\alpha. \quad (11.1)$$

Для компактности записи выражений типа (11.1) удобно ввести вектор элементарной площадки

$$d\vec{S} = \vec{n}dS. \quad (11.2)$$

Тогда:

$$d\Phi_A = \vec{A}d\vec{S}. \quad (11.3)$$

Если поверхность  $\Sigma$  имеет конечные размеры, то поток вектора  $\vec{A}$  через нее находится интегрированием (11.1) или (11.3) по этой поверхности:

$$\Phi_A = \int_{\Sigma} A \cos\alpha dS = \int_{\Sigma} \vec{A}d\vec{S} = \int_{\Sigma} A_n dS, \quad (11.4)$$

где  $A_n$  — проекция вектора  $\vec{A}$  на нормаль к участку поверхности  $dS$ . Знак величин  $d\Phi_A$  и  $\Phi_A$  определяется выбором направления нормали  $\vec{n}$ .

Поток  $\Phi_A$  пропорционален числу линий поля  $\vec{A}$ , пересекающих поверхность  $\Sigma$ . Если для данной поверхности такое пересечение отсутствует, это означает, что  $\Phi_A = 0$ .

Понятие потока векторного поля является одним из важнейших в векторном анализе. Оно используется для формулировки фундаментальных законов для электрического и магнитного полей. Первоначально указанное понятие было введено в гидродинамике для векторного поля  $\vec{V}(x, y, z)$ , характеризующего распределение скоростей частиц жидкости. Величина

$$\Phi_V = \int_{\Sigma} \vec{V} d\vec{S}$$

равна объему жидкости, переносимой через поверхность  $\Sigma$  в единицу времени, откуда становится понятным название обсуждаемого термина. Очевидно, для вектора  $\vec{E}$  никакого реального течения нет.

Итак, потоком вектора напряженности *электрического поля* через некоторую поверхность  $\Sigma$  назовем скалярную величину

$$\Phi_E = \int_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S}. \quad (11.5)$$

Пусть поле создается системой заряженных тел, причем по отдельности тела создают поля с напряженностями  $\vec{E}_1(x, y, z), \dots, \vec{E}_N(x, y, z)$ . Если выполняется принцип суперпозиции для этих полей (разд. 10.4), то результирующая напряженность равна

$$\vec{E}(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(x, y, z). \quad (11.6)$$

Умножив (11.6) на  $d\vec{S}$  и проинтегрировав по рассматриваемой поверхности  $\Sigma$ , мы приходим к выражению для потока вектора  $\vec{E}$ :

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^N \Phi_{E_i}, \quad (11.7)$$

где  $\Phi_{E_i} = \int_{\Sigma} \vec{E}_i d\vec{S}$  — поток через поверхность  $\Sigma$ , обусловленный наличием только поля  $\vec{E}_i(x, y, z)$ . Таким образом, из (11.7) видно, что поток вектора напряженности электрического поля, созданного системой зарядов, через поверхность  $\Sigma$  при выполнении условия (11.6) равен *алгебраической* сумме потоков векторов  $\vec{E}_i$  через ту же поверхность.

## 11.2. Теорема Гаусса

Пусть электрическое поле в вакууме создается группой зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_N$ . Окружим их замкнутой поверхностью  $\Sigma$  (рис. 11.2). Будем считать, что нормаль к этой поверхности направлена наружу. Теорема Гаусса утверждает, что

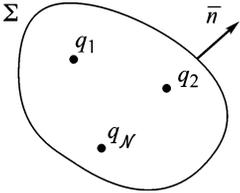


Рис. 11.2

$$\Phi_E \equiv \oint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i. \quad (11.8)$$

*Поток вектора напряженности электрического поля в вакууме через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на величину  $\epsilon_0$ .*

Кружок на символе интеграла означает, что поверхность  $\Sigma$  замкнута.

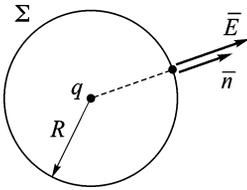


Рис. 11.3

Доказательство этой теоремы начнем с простейшего случая, когда поверхность  $\Sigma$  является сферой, в центре которой расположен один точечный заряд  $q$  (рис. 11.3). Так как модуль напряженности электрического поля точечного заряда  $E$  одинаков во всех точках сферы, его можно вынести за знак интеграла:

$$\Phi_E = \oint_{\Sigma} E \cos \alpha dS = E \oint_{\Sigma} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \oint_{\Sigma} dS. \quad (11.9)$$

Интеграл вида  $\oint_{\Sigma} dS$  равен площади области интегрирования, то есть в данном случае площади поверхности сферы  $4\pi R^2$ . С учетом этого (11.9) сводится к

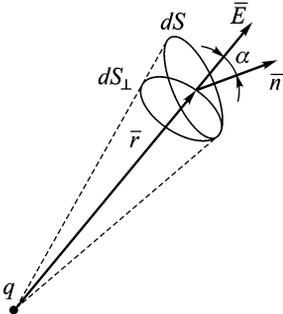


Рис. 11.4

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0},$$

что и доказывает теорему в данном частном случае.

Покажем теперь, что этот результат не зависит от формы поверхности. Выделим на произвольной поверхности малую площадку  $dS$  (рис. 11.4). Изобразим

на рисунке проекцию элемента поверхности  $dS$  на плоскость, перпендикулярную радиусу-вектору  $\vec{r}$ , проведенному от заряда  $q$  в точку расположения малой площадки  $dS$ . Легко показать, что

$$\pm dS_{\perp} = dS \cos\alpha,$$

причем знак «+» соответствует  $\cos\alpha > 0$ , то есть острому углу между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{n}$ .

Тогда поток  $\vec{E}$  через  $dS$

$$d\Phi_E = E \cos\alpha dS = \pm E dS_{\perp} = \pm \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dS_{\perp}}{r^2}. \quad (11.10)$$

Множитель  $\pm \frac{dS_{\perp}}{r^2}$  в (11.10) по определению равен величине *телесного угла*  $d\Omega$ , под которым видна площадка  $dS_{\perp}$ , а следовательно и  $dS$ , из точки расположения заряда  $q$ . Величина  $d\Omega$  является алгебраической и положительна, когда  $\cos\alpha > 0$ , то есть она автоматически учитывает знаки ( $\pm$ ) в формуле (11.10):

$$d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega. \quad (11.11)$$

Для поверхности конечных размеров, интегрируя (11.11), получаем

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega, \quad (11.12)$$

где  $\Omega$  — телесный угол, под которым видна вся поверхность из точки расположения заряда  $q$ .

Если поверхность  $\Sigma$  замкнута, то возможны два случая, когда заряд  $q$  находится внутри нее и вне ее. В первом случае  $\Omega = 4\pi$ , и мы приходим к соотношению (11.8). Во втором случае поверхность  $\Sigma$  может быть разбита на две части следующим образом (рис. 11.5).

Проведем от заряда  $q$  радиусы-векторы, касающиеся поверхности  $\Sigma$ . Линия, проходящая через точки касания, разделит поверхность  $\Sigma$  на две части  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , а также ограничит некоторую незамкнутую поверхность  $\Sigma_r$  (рис. 11.5). Очевидно, абсолютные величины телесных углов, опирающихся на поверхности  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_r$ , равны

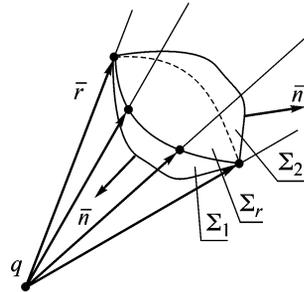


Рис. 11.5

$$|\Omega_1| = |\Omega_2| = |\Omega_r|. \quad (11.13)$$

Однако нормаль к поверхности  $\Sigma_1$  образует всегда тупой угол с радиусом-вектором  $\vec{r}$ , то есть  $\cos\alpha < 0$ , а для поверхности  $\Sigma_2$   $\cos\alpha > 0$ , следовательно,  $\Omega_1 < 0$ , а  $\Omega_2 > 0$ . Отсюда с учетом (11.12) и (11.13) следует

$$\Phi_E = (\Omega_1 + \Omega_2) \frac{q}{4\pi\epsilon_0} = 0.$$

Таким образом, независимо от формы замкнутой поверхности  $\Sigma$  и расположения заряда  $q$  относительно нее доказана справедливость выражения (11.8).

Пусть, наконец, электрическое поле создается системой зарядов  $q_1, \dots, q_M$ , расположенных внутри рассматриваемой замкнутой поверхности произвольной формы. В вакууме выполняется принцип суперпозиции для потоков вектора  $\vec{E}$  (см. формулу (11.7)). Следовательно, записав теорему Гаусса для каждого заряда  $q_i$  и поля  $\vec{E}_i$ , создаваемого им в отдельности, и затем сложив полученные  $M$  уравнений, мы приходим к соотношению (11.8).

Тем самым теорема доказана для самого общего случая в условиях вакуума. Если заряды помещены в жидкую или газообразную среду с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , то

$$\Phi_E = \oint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^M q_i. \quad (11.14)$$

Как следует из вывода, теорема Гаусса является следствием двух важных свойств электростатического поля — центральности поля точечного заряда и того, что напряженность такого поля падает с расстоянием как  $1/r^2$ . Следовательно, аналогичные теоремы будут справедливы для любых полей, обладающих такими свойствами, например для гравитационного.

### 11.3. Примеры применения теоремы Гаусса для расчета напряженности электрического поля

Сразу следует отметить, что теорема Гаусса не применима для нахождения вектора  $\vec{E}$  поля произвольной системы зарядов. Это следует из того, что (11.8) — одно скалярное соотношение, а нам нужно в общем случае определить три проекции —  $E_x, E_y$

и  $E_z$ . Поэтому только в задачах с плоской, цилиндрической и сферической симметрией распределения зарядов, когда очевидно направление вектора  $\vec{E}$ , теорема позволяет вычислить модуль этого вектора.

**Пример 1.** Найти напряженность электрического поля, создаваемого бесконечным плоскопараллельным равномерно заряженным по объему слоем толщиной  $2a$ , объемная плотность заряда  $\rho$ , диэлектрическая проницаемость материала слоя  $\epsilon = 1$ .

*Решение.* Введем систему координат с началом на плоскости, разделяющей слой на две равные части, причем ось  $Oz$  перпендикулярна этой плоскости.

В направлениях  $x$  и  $y$  слой бесконечен (рис. 11.6). Эта задача обладает плоской симметрией: все физические величины не должны зависеть от координат  $x$  и  $y$ . Этому условию удовлетворяет вектор  $\vec{E}$ , совпадающий по направлению с осью  $Oz$ , причем, так как направления  $z \rightarrow +\infty$  и  $z \rightarrow -\infty$  эквивалентны,  $E_z$  имеет разные знаки справа и слева от плоскости  $Oxy$ , а следовательно,  $E_z(z = 0) = 0$ . Если  $\rho > 0$ , то вектор  $\vec{E}$  направлен так, как указано на рис. 11.6.

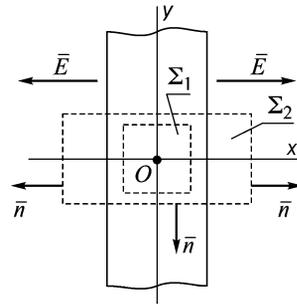


Рис. 11.6

После определения только из соображений симметрии направления  $\vec{E}$ , необходимо выбрать такую форму замкнутой поверхности, чтобы интеграл в (11.8) рассчитывался простейшим образом. Для этого отдельные участки указанной поверхности должны быть либо параллельны, либо перпендикулярны вектору  $\vec{E}$ . В нашем случае такой поверхностью может быть цилиндр с образующей, параллельной оси  $Oz$ , и основаниями, перпендикулярными оси  $Oz$ , причем основания расположены симметрично относительно плоскости  $Oxy$  (форма оснований не играет роли). Высота цилиндра, равная  $2|z|$ , будет переменной и будет соответствовать координате  $z$ , для которой рассчитывается вектор  $\vec{E}$ .

Задача, естественно, распадается на два случая:  $|z| \leq a$  и  $|z| > a$ . При  $|z| \leq a$  поверхность интегрирования  $\Sigma_1$  включает внутри себя заряд  $q = S_{\text{осн}} \cdot 2|z| \rho$ , где  $S_{\text{осн}}$  — площадь основания цилиндра.

$$\Phi_E = \oint_{\Sigma_1} \vec{E} d\vec{S} = \int_{\Sigma_{\text{осн}}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{\Sigma_{\text{бок}}} \vec{E} d\vec{S}, \quad (11.15)$$

где  $\Sigma_{\text{бок}}$  — боковая поверхность цилиндра.

В правой части (11.15) первый интеграл

$$\int_{\Sigma_{\text{осн}}} \vec{E} d\vec{S} = \int_{\Sigma_{\text{осн}}} |E_z| dS = |E_z| \int_{\Sigma_{\text{осн}}} dS = 2|E_z| S_{\text{осн}}, \quad (11.16)$$

так как  $\vec{E} \parallel d\vec{S}$  на основаниях цилиндра. При этом мы учли, что для  $E_z > 0$  для  $z > 0$  и  $E_z < 0$  для  $z < 0$ .

Второй интеграл в (11.15) равен нулю, ибо  $\vec{E} \perp d\vec{S}$  на боковой поверхности.

Итак, в соответствии с теоремой Гаусса

$$2|E_z| S_{\text{осн}} = \frac{S_{\text{осн}} 2|z| \rho}{\epsilon_0}.$$

Отсюда

$$|E_z| = \frac{\rho |z|}{\epsilon_0}. \quad (11.17)$$

Чтобы учесть направление вектора  $\vec{E}$ , необходимо опустить знаки модулей в (11.17):

$$E_z = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \quad \text{для } |z| \leq a. \quad (11.18)$$

Для случая  $|z| > a$  заряд внутри поверхности интегрирования  $\Sigma_2$  постоянен:  $q = S_{\text{осн}} 2a\rho$  и

$$|E_z| = \frac{\rho a}{\epsilon_0}.$$

Направление  $\vec{E}$  можно задать следующим образом:

$$E_z = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \cdot \frac{z}{|z|}, \quad |z| > a. \quad (11.19)$$

График функции, описываемой выражениями (11.18) и (11.19), приведен на рис. 11.7.

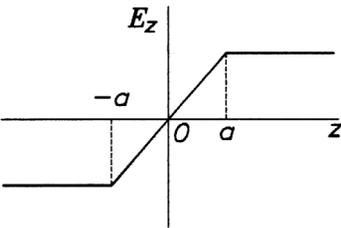


Рис. 11.7

**Пример 2.** Найти напряженность электрического поля равномерно заряженного по поверхности бесконечного цилиндра радиуса  $R$  (рис. 11.8). Поверхностная плотность заряда равна  $\sigma$ .

*Решение.* Прежде всего проанализируем возможное направление вектора  $\vec{E}$ . Осевой симметрии, которой обладает данная задача, удовлетворяют две системы линий поля  $\vec{E}$  — радиальная и кольцевая (рис. 11.9). Отметим, что на рис. 11.9 линии лежат в плоскости, перпендикулярной цилиндру. С учетом того, что линии электростатического поля незамкнуты, физически приемлемой оказывается только радиальная система линий (рис. 11.9, а).

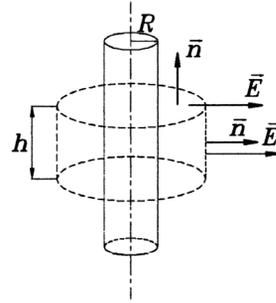


Рис. 11.8

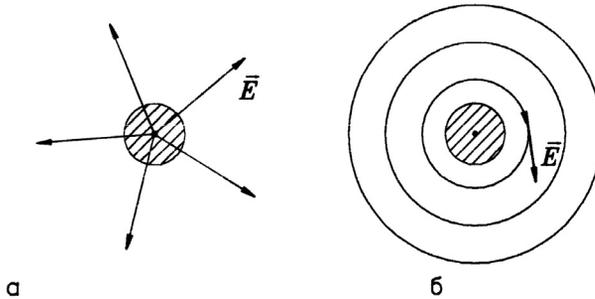


Рис. 11.9

Теперь, зная направление вектора  $\vec{E}$ , необходимо подобрать замкнутую поверхность, для которой интеграл (11.8) рассчитывается простейшим образом. Очевидно, такой поверхностью является круговой цилиндр, соосный с заряженным телом (рис. 11.8). Поток вектора  $\vec{E}$  через основания и боковую поверхность такого цилиндра равен

$$\Phi_E = \oint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \int_{\Sigma_{\text{осн}}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{\Sigma_{\text{бок}}} \vec{E} d\vec{S}. \quad (11.20)$$

В правой части (11.20) первый интеграл равен нулю, ибо на основаниях цилиндра вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен к нормали. На боковой поверхности направления  $\vec{E}$  и  $\vec{n}$  совпадают, причем модуль напряженности электрического поля в силу симметрии задачи постоянен на этой части поверхности. Отсюда

$$\Phi_E = \int_{\Sigma_{\text{бок}}} \vec{E} d\vec{S} = \int_{\Sigma_{\text{бок}}} E dS = E \int_{\Sigma_{\text{бок}}} dS = E 2\pi r h.$$

В соответствии с теоремой Гаусса

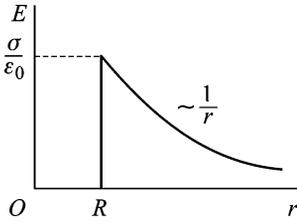


Рис. 11.10

$$E2\pi rh = \begin{cases} 0 & \text{при } r < R, \\ 2\pi Rh\sigma & \text{при } r \geq R. \end{cases}$$

Следовательно:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r < R, \\ \frac{R\sigma}{\epsilon_0 r} & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (11.21)$$

График функции  $E(r)$  приведен на рис. 11.10.

## § 12. РАБОТА СИЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ПОТЕНЦИАЛ

Напряженность электрического поля  $\vec{E}$ , как уже отмечалось, представляет собой силовую характеристику. Однако часто оказывается удобным ввести некоторую физическую величину, через изменение которой можно определить работу, совершаемую силами поля. Такая *энергетическая характеристика электрического поля называется потенциалом*.

### 12.1. Потенциал, разность потенциалов

Поле сил неподвижного точечного заряда  $q$  является центральным. Ранее (разд. 6.3) было доказано, что любое центральное поле сил потенциально, и найдено выражение для потенциальной энергии взаимодействия двух точечных зарядов (6.27). Пусть электростатическое поле заряда  $q$  исследуется с помощью пробного заряда  $q_{\text{пр}}$ , тогда потенциальная энергия последнего в поле заряда  $q$  определяется в соответствии с выражением

$$U_{\text{пр}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \cdot q_{\text{пр}}. \quad (12.1)$$

Функция  $U_{\text{пр}}(\vec{r})$  зависит от величины  $q_{\text{пр}}$ , поэтому при введении энергетической характеристики самого электрического поля удобно потенциальную энергию пробного заряда разделить на значение  $q_{\text{пр}}$ :

$$\frac{U_{\text{пр}}(\vec{r})}{q_{\text{пр}}} = \varphi(\vec{r}). \quad (12.2)$$

Величина  $\varphi(\vec{r})$ , определяемая как *отношение потенциальной энергии пробного заряда, помещенного в данную точку электрического поля, к величине этого заряда, называется потенциалом.*

Для точечного заряда в вакууме, газообразном или жидком диэлектрике

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\epsilon r}. \quad (12.3)$$

Единицей измерения потенциала  $\varphi$  в системе СИ является вольт ( $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж}/1 \text{ Кл}$ ).

Если пробный заряд перемещается из положения 1 в положение 2, то силы электростатического поля совершают работу

$$A_{12} = U_{\text{пр}}(\vec{r}_1) - U_{\text{пр}}(\vec{r}_2) = q_{\text{пр}} [\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)] \equiv q_{\text{пр}} (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (12.4)$$

Выражение  $\varphi_1 - \varphi_2$  называется разностью потенциалов между точками 1 и 2 электростатического поля. Из сравнения формул (6.2) и (12.4) следует, что

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \frac{A_{12}}{q_{\text{пр}}}, \quad (12.5)$$

причем вследствие потенциальности рассматриваемого поля для любой замкнутой траектории

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (12.6)$$

Напомним, что дифференциал  $d\vec{r}$  в выражении (6.2) является малым перемещением материальной точки. Поскольку интеграл типа (12.5) в дальнейшем будет рассчитываться для некоторой кривой вне связи с перемещением конкретного заряженного тела, то в качестве дифференциала выбирается элемент кривой интегрирования  $d\vec{l}$ . Направление вектора  $d\vec{l}$  определяется начальной и конечной точками на кривой интегрирования или направлением обхода для замкнутого контура интегрирования.

Контурный интеграл вида (12.6) называется *циркуляцией вектора  $\vec{E}$* . Для электростатического поля циркуляция всегда равна нулю. Из этого утверждения следует, что линии такого поля не могут быть замкнутыми. Докажем это от противного.

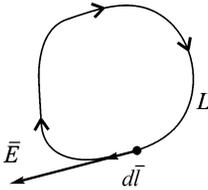


Рис. 12.1

Пусть линии вектора  $\vec{E}$  замкнуты (рис. 12.1). Возьмем циркуляцию вдоль такой линии. В любой ее точке векторы  $\vec{E}$  и  $d\vec{l}$  сонаправлены, скалярное произведение  $\vec{E}d\vec{l} > 0$

и, следовательно,  $\oint_L \vec{E}d\vec{l} > 0$ , что противоречит

уравнению (12.6). Незамкнутыми линиями обладают потенциальные поля. Как уже было отмечено (разд. 10.5), для электростатического поля линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных.

Для введенной нами физической величины — потенциала — полностью справедливы замечания, приведенные в конце раздела 6.2 при обсуждении потенциальной энергии. Очевидно, что потенциал определен с точностью до аддитивной постоянной. Выбор этой постоянной зависит от условий нормировки. Так, в примере с точечным зарядом мы взяли потенциал бесконечно удаленных точек в пространстве равным нулю. Так можно сделать тогда, когда система зарядов ограничена в пространстве. Однако в ряде гипотетических примеров бесконечно протяженных заряженных объектов (бесконечные плоскость, плоскопараллельный слой, нить, цилиндр) потенциал  $\varphi \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow \infty$ . Поэтому выражение  $\varphi(\vec{r})$  нормируют в какой-либо конечной точке пространства (см. разд. 12.2).

В разделе 6.2 была установлена связь между силой и потенциальной энергией (формулы (6.15) и (6.16)). Отсюда непосредственно вытекает следующее соотношение:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (12.7)$$

которое позволяет найти вектор  $\vec{E}$  в каждой точке пространства, если задана скалярная функция  $\varphi(x, y, z)$ .

Поверхность, во всех точках которой потенциал постоянен, называется *эквипотенциальной*. При перемещении по ней электрического заряда работа силами поля не совершается. Очевидно, что вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен такой поверхности, то есть линии электрического поля всегда нормальны к эквипотенциальным поверхностям. В частности, для точечного заряда  $\varphi = \text{const}$  на концентрических сферах, в центре которых и расположен этот заряд (рис. 12.2). Эквипотен-

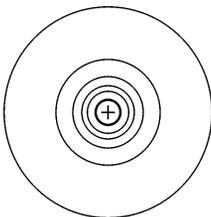


Рис. 12.2

циальные поверхности проводят так, чтобы разность потенциалов между соседними поверхностями была всюду одна и та же.

В разделе 6.2 было дано определение градиента скалярной функции в декартовой системе координат. Введем единичный вектор  $\vec{e}_l$ , в каждой точке пространства направленный в сторону максимального возрастания рассматриваемой функции  $\varphi$ . Тогда

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial l} \cdot \vec{e}_l,$$

и можно дать следующее определение: градиент функции  $\varphi$  есть вектор, направленный в сторону максимального возрастания функции, величина которого равна производной функции  $\varphi$  по этому направлению.

## 12.2. Пример расчета потенциала протяженной системы зарядов

Вычислим потенциал электростатического поля, создаваемого равномерно заряженным по объему плоскопараллельным слоем. Напряженность поля такого объекта была найдена в разд. 11.3. Будем пользоваться системой координат, введенной на рис. 11.6. Напомним, что вектор  $\vec{E}$  параллелен оси  $Oz$ , и проекции вектора на ось  $Oz$  равны

$$E_z = \begin{cases} \frac{\rho z}{\epsilon_0} & \text{при } -a \leq z \leq a, \\ \frac{\rho a}{\epsilon_0} & \text{при } z > a, \\ -\frac{\rho a}{\epsilon_0} & \text{при } z < -a. \end{cases} \quad (12.8)$$

В общем случае  $\varphi(\vec{r}) = -\int \vec{E} d\vec{l} + \text{const}$ .

Так как  $\vec{E} = E_z \vec{e}_z$ , то  $\vec{E} d\vec{l} = E_z dz$  и

$$\varphi(z) = -\int E_z dz + \text{const}. \quad (12.9)$$

Найдем интеграл (12.9) для трех интервалов координат  $z$ , указанных в (12.8).

$$1. \quad -a \leq z \leq a: \quad \varphi(z) = -\int \rho \frac{z}{\epsilon_0} dz = -\rho \frac{z^2}{2\epsilon_0} + C_1.$$

$$2. \quad z > a: \quad \varphi(z) = -\int \rho \frac{a}{\varepsilon_0} dz = -\rho \frac{az}{\varepsilon_0} + C_2.$$

$$3. \quad z < -a: \quad \varphi(z) = -\int -\rho \frac{a}{\varepsilon_0} dz = \rho \frac{az}{\varepsilon_0} + C_3.$$

Очевидно, в данной задаче нельзя положить потенциал при  $z \rightarrow \pm\infty$  равным нулю, ибо  $\varphi \rightarrow \pm\infty$  для таких значений  $z$ . Поэтому будем считать  $\varphi(0) = 0$ , то есть  $C_1 = 0$ . Тогда необходимо «сшить» решения 1–3 в точках  $z = \pm a$ . Это дает в результате

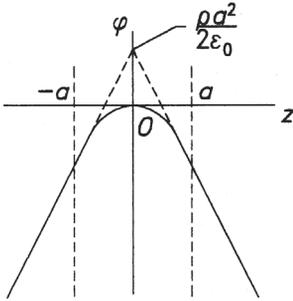


Рис. 12.3

$$\varphi(z) = \begin{cases} -\frac{\rho z^2}{2\varepsilon_0} & \text{при } |z| \leq a, \\ -\frac{\rho a}{\varepsilon_0} |z| + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} & \text{при } |z| > a. \end{cases} \quad (12.10)$$

График  $\varphi(z)$  представлен на рис. 12.3.

### 12.3. Принцип суперпозиции для потенциалов

Пусть имеется система точечных зарядов  $q_1, \dots, q_N$  и соблюдены условия выполнения принципа суперпозиции для напряженностей электрических полей, создаваемых этими зарядами. Тогда с учетом того, что работа нескольких сил равна сумме работ, совершенных этими силами по отдельности (см. разд. 6.1), можно записать принцип суперпозиции для потенциалов:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\vec{r}), \quad (12.11)$$

где  $\varphi_i(\vec{r})$  — потенциал поля  $i$ -го заряда, создаваемого им в отсутствие остальных зарядов.

Для случая точечных зарядов

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r}_i|}, \quad (12.12)$$

где  $\vec{r}_i$  — радиус-вектор, проведенный от заряда с номером  $i$  до точки наблюдения  $A$ .

Для протяженных тел, также как и в случае расчета напряженности электрического поля, тело разбивается на малые элемен-

ты, которые представляются из точки наблюдения  $A$  точечными зарядами. Затем находится потенциал, создаваемый каждым из элементов, и эти вклады суммируются. Таким образом, при линейном, поверхностном и объемном распределениях заряда потенциал в точке наблюдения будет равен соответственно

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda dl}{|\vec{r}|}; \quad (12.13)$$

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma dS}{|\vec{r}|}; \quad (12.14)$$

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{|\vec{r}|}. \quad (12.15)$$

Подчеркнем, что нахождение потенциалов осуществляется посредством суммирования скалярных величин, что существенно упрощает задачу по сравнению с расчетом вектора напряженности для системы зарядов. Если с использованием одной из формул (12.12)–(12.15) определена функция  $\varphi(x, y, z)$ , то напряженность электрического поля в любой точке можно найти используя соотношение (12.7).

**Пример.** Определить потенциал и напряженность электрического поля, созданного равномерно заряженным тонким кольцом на оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно плоскости, в которой лежит кольцо (рис. 12.4).

**Решение.** Пусть полный заряд кольца равен  $q$ , тогда линейная плотность заряда  $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$ . Потенциал поля, создаваемого малым элементом кольца  $dl$  в точке  $A$  с координатой  $x$ ,

$$d\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

Полный потенциал в рассматриваемой точке

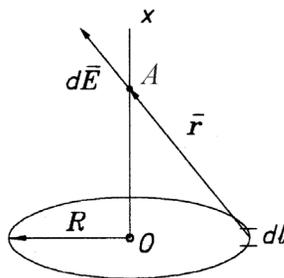


Рис. 12.4

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+x^2}} \int_L dl = \frac{\lambda 2\pi R}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}.$$

Вследствие симметрии распределения заряда относительно оси  $Ox$  в точках на оси напряженность поля направлена вдоль  $Ox$ :

$$E = E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{xq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(R^2+x^2)^3}}. \quad (12.16)$$

Формула (12.16) может быть получена и непосредственным суммированием вкладов  $d\vec{E}$  от малых элементов  $dl$ . Однако при этом необходимо складывать векторы, направленные вдоль  $\vec{r}$ , что существенно сложнее по сравнению с приведенным расчетом.

### § 13. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ

Простейшей системой точечных зарядов является *диполь* — совокупность двух равных по величине, но противоположных по знаку точечных зарядов, смещенных относительно друг друга на некоторое расстояние. Пусть  $\vec{l}$  — вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному (рис. 13.1). Тогда вектор  $\vec{p}_E = q\vec{l}$  называют электрическим моментом диполя или просто *электрическим дипольным моментом*. Если величина  $l$  существенно меньше расстояния до точки, в которой наблюдают электрическое поле диполя, то такой диполь называют *точечным*. В этом случае характеристики поля, создаваемого диполем, могут быть выражены через расстояние от него до точки наблюдения, а не через координаты каждого из зарядов в отдельности.

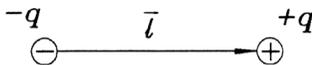


Рис. 13.1

Если величина  $l$  существенно меньше расстояния до точки, в которой наблюдают электрическое поле диполя, то такой диполь называют *точечным*. В этом случае характеристики поля, создаваемого диполем, могут быть выражены через расстояние от него до точки наблюдения, а не через координаты каждого из зарядов в отдельности.

Единицей измерения электрического дипольного момента  $p_E$  в системе СИ является Кл·м.

Отметим, что понятие диполя является определяющим при анализе поведения вещества в электрическом поле. Действительно, молекулы среды могут быть представлены как микроскопические диполи, электрический момент которых может изменять как величину, так и направление во внешнем поле.

### 13.1. Поле точечного диполя

Найдем потенциал и напряженность электрического поля точечного диполя. Очевидно, задача обладает симметрией относительно оси, проходящей через оба заряда (рис. 13.2).

Вначале рассчитаем потенциал в точке  $A$  через расстояния от каждого из зарядов:

$$\varphi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}. \quad (13.1)$$

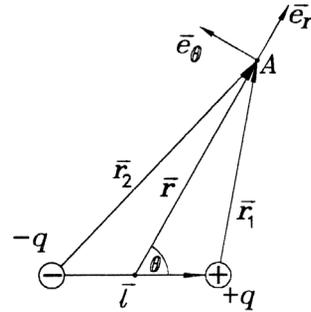


Рис. 13.2

Пусть вектор  $\vec{r}$  проведен из центра диполя в точку  $A$ , причем угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{l}$  равен  $\theta$ . В соответствии с теоремой косинусов

$$r_2^2 = \frac{l^2}{4} + r^2 + rl \cos\theta; \quad (13.2)$$

$$r_1^2 = \frac{l^2}{4} + r^2 - rl \cos\theta. \quad (13.3)$$

После вычитания правых и левых частей равенств (13.2) и (13.3), получаем

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2rl \cos\theta. \quad (13.4)$$

Выразим отсюда разность  $r_2 - r_1$  и подставим полученную формулу в (13.1):

$$\varphi_A = \frac{q2rl \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2 (r_1 + r_2)}. \quad (13.5)$$

Воспользуемся тем условием, что диполь точечный, то есть тем, что  $r_1 r_2 \approx r^2$  и  $r_1 + r_2 \approx 2r$ . Тогда выражение (13.5) существенно упрощается:

$$\varphi_A = \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{ql \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_E \cos\theta}{r^2}. \quad (13.6)$$

Таким образом, потенциал точечного диполя выражается через полярные координаты точки наблюдения  $r$  и  $\theta$ .

Для нахождения вектора напряженности электрического поля диполя воспользуемся соотношением (12.7). Выражение для градиента функции в полярных координатах имеет вид

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta, \quad (13.7)$$

где  $\vec{e}_r$  и  $\vec{e}_\theta$  — единичные векторы, изображенные на рис. 13.2. Отсюда компоненты вектора  $\vec{E}$

$$E_r = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{2p_E \cos \theta}{r^3}, \quad (13.8)$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{p_E \sin \theta}{r^3} \quad (13.9)$$

и модуль вектора  $\vec{E}$

$$E = \frac{p_E}{4\pi \epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}. \quad (13.10)$$

Из полученных выражений для потенциала и напряженности поля точечного диполя видно, что эти характеристики убывают с расстоянием  $r$  быстрее, чем в случае точечного заряда (ср. формулы (10.6), (12.3), (13.6) и (13.10)). Очевидно, это связано с компенсацией вкладов разноименных зарядов на больших расстояниях.

### 13.2. Диполь во внешнем электрическом поле

На каждый из зарядов, составляющих диполь, помещенный в электрическое поле, действует сила. Это заставляет диполь изменять свое положение в пространстве. Начнем свое рассмотрение с более простого случая *однородного внешнего поля* (рис. 13.3).

Результирующая сила, действующая на диполь,

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q\vec{E} - q\vec{E} = 0.$$

Однако момент кулоновских сил относительно произвольной точки  $O$  в общем случае отличен от нуля:

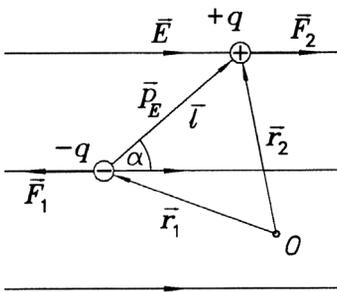


Рис. 13.3

$$\vec{N} = [\vec{r}_1 \vec{F}_1] + [\vec{r}_2 \vec{F}_2] = [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \vec{E}] q = [\vec{p}_E \vec{E}]. \quad (13.11)$$

Модуль вектора момента сил равен

$$N = p_E E \sin \alpha, \quad (13.12)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{p}_E$  и  $\vec{E}$ .

Очевидно, внешнее электрическое поле стремится повернуть диполь так, чтобы он был ориентирован вдоль силовых линий. При  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi$  диполь находится в положениях соответственно устойчивого и неустойчивого равновесия.

Коль скоро под действием поля диполь изменяет свою ориентацию, то при этом совершается работа. Найдем величину этой работы при изменении  $\alpha$  от  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$ . Элементарная работа, совершаемая при малом повороте на угол  $d\alpha$ , равна

$$dA = \vec{N} d\vec{\alpha} = N |d\alpha|. \quad (13.13)$$

Так как работа совершается силами поля, то она положительна ( $dA > 0$ ). Однако угол  $\alpha$  уменьшается, следовательно,  $d\alpha < 0$  и  $|d\alpha| = -d\alpha$ . С учетом этого искомая работа

$$A_{12} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (-p_E E \sin \alpha) d\alpha = p_E E \cos \alpha_2 - p_E E \cos \alpha_1. \quad (13.14)$$

С другой стороны, совершенную работу можно выразить через изменение потенциальной энергии диполя во внешнем поле:

$$A_{12} = U_E(\alpha_1) - U_E(\alpha_2). \quad (13.15)$$

Сравнивая (13.14) и (13.15), в качестве выражения для потенциальной энергии диполя можно выбрать следующее:

$$U_E(\alpha) = -p_E E \cos \alpha = -(\vec{p}_E \vec{E}). \quad (13.16)$$

Если внешнее поле не является однородным, то сила, действующая на диполь, в общем случае отлична от нуля. Пусть поле мало меняется на расстояниях, сравнимых с размерами диполя. Это означает, что в масштабах неоднородности рассматриваемого поля диполь можно считать точечным. Тогда в общем случае сила, действующая на диполь, может быть выражена через градиент его потенциальной энергии, взятый в точке расположения диполя:

$$\vec{F} = -\text{grad}U. \quad (13.17)$$

Воспользовавшись выражением (13.16), получим

$$\vec{F} = \text{grad}(\vec{p}_E \vec{E}) = \text{grad}(p_E E \cos \alpha). \quad (13.18)$$

Рассмотрим для простоты частный случай поля, обладающего симметрией относительно оси  $Ox$  (рис. 13.4, 13.5). Пусть центр диполя лежит на этой оси, причем электрический момент диполя образует угол  $\alpha$ , отличный от  $\pi/2$ , с направлением вектора  $\vec{E}$ . В этом случае на диполь будет действовать сила, стремящаяся переместить его в направлении оси  $Ox$ :

$$F_x = p_E \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha, \quad (13.19)$$

где  $\frac{\partial E}{\partial x}$  — производная модуля вектора напряженности по координате  $x$ .

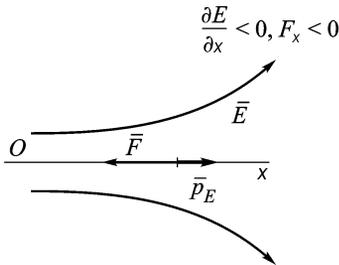


Рис. 13.4

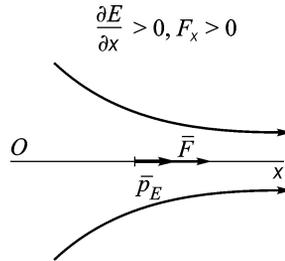


Рис. 13.5

Из (13.19) следует, что если диполь ориентирован по силовым линиям, то есть находится в положении устойчивого равновесия, то он втягивается в область более сильного поля. При произвольной ориентации диполя он ориентируется вдоль вектора  $\vec{E}$  и также втягивается в область более сильного поля.

## § 14. ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Диэлектриками или изоляторами называют вещества, которые практически не проводят электрического тока. Это связано с тем, что в таких веществах отсутствуют свободные носители

заряда, которые могли бы перемещаться на макроскопические расстояния под действием электрического поля. Находящиеся в диэлектрике заряды могут совершать лишь малые смещения, сравнимые с размерами атомов или молекул ( $\sim 10^{-10}$ – $10^{-9}$  м). Такие расстояния называют микроскопическими. Рассмотрим подробнее электрические эффекты в изоляторах, обусловленные присутствием внешнего поля.

### 14.1. Электрическое поле в диэлектриках

В электростатике источниками электрических полей могут быть только заряженные частицы. Мы разделим их на две группы. К первой отнесем заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, и назовем их связанными. Во вторую группу включим заряды, не являющиеся составными частями молекул диэлектрика. Они могут располагаться на диэлектрике или вне его. Примером служат избыточные заряды на изоляторах, возникающие при электризации трением, или заряды на металлических обкладках конденсатора, внутри которого помещен диэлектрик. Такие заряды называют свободными или, следуя Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицу, сторонними.

Электрическое поле в веществе на микроскопическом масштабе, называемое микроскопическим полем, обусловлено вкладом полей от связанных и сторонних зарядов:

$$\vec{E}_{\text{микро}} = \vec{E}_{\text{св}} + \vec{E}_{\text{стор}}. \quad (14.1)$$

На указанном масштабе величина  $\vec{E}_{\text{микро}}$  изменяется в огромных пределах, сильно возрастая вблизи электронов и ядер атомов. Точно задать расположение заряженных частиц не представляется возможным, что делает микроскопический подход весьма затруднительным.

Для многих целей оказывается достаточным более простое описание макроскопической электродинамики. Электрическое поле в веществе усредняется по физически малому объему. Этот объем должен быть достаточно большим, чтобы сгладились изменения поля на микроскопических расстояниях. Для этого рассматриваемый объем должен содержать тысячи атомов. С другой стороны, в пределах этого объема макроскопически усредненные значения электрического поля должны быть практически постоянными.

Таким образом, напряженность макроскопического электрического поля

$$\vec{E}_{\text{макро}} = \langle \vec{E}_{\text{микро}} \rangle = \langle \vec{E}_{\text{св}} \rangle + \langle \vec{E}_{\text{стор}} \rangle. \quad (14.2)$$

Обычно поле сторонних зарядов по отношению к диэлектрику бывает внешним и обозначается

$$\vec{E}_0 = \langle \vec{E}_{\text{стор}} \rangle.$$

Усредненное поле связанных зарядов обозначим

$$\vec{E}' = \langle \vec{E}_{\text{св}} \rangle.$$

Тогда

$$\vec{E}_{\text{макро}} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (14.3)$$

В дальнейшем мы будем анализировать лишь макроскопическое поле и опустим соответствующий индекс.

## 14.2. Механизмы поляризации диэлектриков

Мы ограничим свое рассмотрение случаем жидких и газообразных диэлектриков. При помещении изолятора во внешнее поле происходит определенное упорядочение расположения связанных зарядов. Это явление называется поляризацией диэлектрика. Молекулы, составляющие вещество, могут не иметь в исходном состоянии дипольного момента (неполярные молекулы) или обладать определенным электрическим моментом (полярные молекулы). В связи с этим различают упругий и ориентационный механизмы поляризации. Во всех случаях мы будем считать, что электрическое поле, в котором находятся молекулы вещества, много меньше внутриаомного ( $\sim 10^{11}$  В/м).

### 1. Упругая поляризация.

В одноатомных молекулах (инертные газы, пары металлов) и симметричных многоатомных молекулах ( $\text{H}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{CH}_4$ ) центры тяжести положительных и отрицательных зарядов при отсутствии внешнего электрического поля совпадают (рис. 14.1, а) и как следствие их дипольные электрические моменты равны нулю. При помещении такой молекулы в электрическое поле  $\vec{E}$  указанные центры тяжести

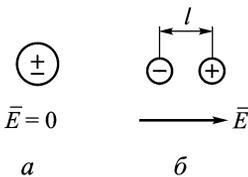


Рис. 14.1

смещаются на некоторое расстояние  $l$  (рис. 14.1, б). Если поле  $E$  достаточно мало ( $E \ll E_{ат}$ ), то  $l$  пропорционально силам, приложенным к зарядам. Это означает, что центры тяжести зарядов различного знака связаны так называемой квазиупругой силой, то есть силой, для которой выполняется закон Гука. Отсюда становятся понятными термины «упругая поляризация» и «модель упругого диполя». Коль скоро сила, действующая на заряды со стороны электрического поля, пропорциональна его напряженности, то и возникающий у молекулы дипольный момент

$$\vec{p}_E^M = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_{лок}, \quad (14.4)$$

где  $\alpha$  — не зависящий от поля коэффициент пропорциональности,  $\vec{E}_{лок}$  — напряженность так называемого локального поля в точке расположения молекулы. Индекс «м» подчеркивает, что речь идет о наведенном дипольном моменте молекулы.

Коэффициент  $\alpha$  называют *поляризуемостью* молекулы. Он является характеристикой вещества и практически не зависит от температуры. Единицей измерения поляризуемости  $\alpha$  в системе СИ является кубический метр ( $\text{м}^3$ ).

Необходимость введения локального поля обусловлена тем, что молекула сама на себя не действует, и в (14.4) фигурирует напряженность электрического поля, созданного всеми сторонними и связанными зарядами за вычетом вклада самой молекулы.

В результате упругой поляризации наведенные дипольные моменты ориентированы вдоль электрического поля (рис. 14.2).

## 2. Ориентационная поляризация.

Этот вид поляризации наблюдается в веществах, состоящих из полярных молекул, обладающих собственным электрическим дипольным моментом  $\vec{p}_0$ . Полярными являются несимметричные молекулы, например  $\text{HCl}$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{NH}_3$  и др. В отсутствие электрического поля эти диполи ориентированы в веществе хаотично из-за теплового движения, и поляризация не возникает. При наложении поля диполи ориентируются преимущественно вдоль вектора  $\vec{E}$ . Однако полному упорядочению диполей препятствует тепловое движение (рис. 14.3), и среднее значение

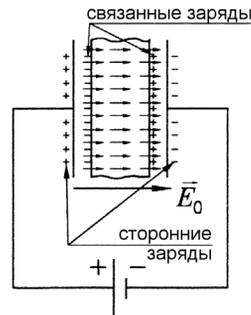


Рис. 14.2

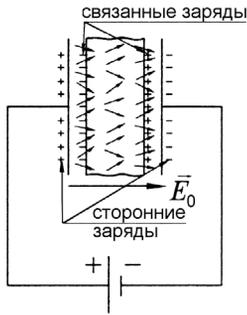


Рис. 14.3

компоненты дипольного момента, ориентированной по полю, может быть рассчитано методами статистической физики:

$$\langle \vec{p}_E^M \rangle = \frac{p_0^2}{3kT} \vec{E}_{\text{лок}}, \quad (14.5)$$

где  $T$  — абсолютная температура,  $k$  — постоянная Больцмана ( $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К).

Из (14.5) видно, что с повышением температуры величина указанной компоненты уменьшается.

Очевидно, что в электрическом поле будет происходить и определенная упругая поляризация молекулы. Однако, как правило, наведенный дипольный момент оказывается существенно меньшим величины  $p_0$ . Следовательно, вклад ориентационной компоненты в статическую поляризацию среды можно считать преобладающим. Такое представление называют моделью жесткого диполя.

### 14.3. Вектор поляризации среды. Локальное поле

Макроскопической характеристикой среды, помещенной в электрическое поле, является *вектор поляризации, определяемый как электрический дипольный момент единицы объема вещества*:

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_{E_i}^M}{\Delta V}. \quad (14.6)$$

Единицей измерения вектора поляризации  $\vec{P}$  является Кл/м<sup>2</sup>.

При выполнении условия  $E \ll E_{\text{ат}}$  вектор поляризации связан с напряженностью макроскопического поля в веществе (см. (14.3)):

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}, \quad (14.7)$$

где  $\chi$  — диэлектрическая восприимчивость среды, являющаяся безразмерной величиной.

Представляет интерес выяснить, как соотносятся параметр  $\chi$  и микроскопические характеристики вещества  $\alpha$  и  $p_0$ . Пусть  $n_1$

и  $n_2$  — концентрации соответственно неполярных и полярных молекул в среде. Тогда вектор поляризации

$$\vec{P} = \left( n_1 \alpha \epsilon_0 + n_2 \frac{p_0^2}{3kT} \right) \vec{E}_{\text{лок}}. \quad (14.8)$$

Если мы знаем, как выразить вектор  $\vec{E}_{\text{лок}}$  через напряженность макроскопического поля, то легко найдем указанное соотношение. Для случая разреженных газов локальное поле практически совпадает с макроскопическим ( $\vec{E}_{\text{лок}} \approx \vec{E}$ ), и из сравнения (14.7) и (14.8) получаем

$$\chi = \frac{1}{\epsilon_0} \left( n_1 \alpha \epsilon_0 + n_2 \frac{p_0^2}{3kT} \right). \quad (14.9)$$

Помимо  $\chi$  часто удобно использовать величину  $\epsilon$ , называемую диэлектрической проницаемостью среды:

$$\epsilon = 1 + \chi. \quad (14.10)$$

Мы формально уже применяли эту характеристику для учета роли жидкой или газообразной сред в снижении напряженности электрического поля точечного заряда. Очевидно,

$$\epsilon = 1 + \frac{1}{\epsilon_0} \left( n_1 \alpha \epsilon_0 + n_2 \frac{p_0^2}{3kT} \right). \quad (14.11)$$

При анализе электрических явлений в жидкостях и сжатых газах, а тем более в твердых телах, уже нельзя полагать, что напряженности локального и макроскопического полей близки. Расчет  $\vec{E}_{\text{лок}}$  был выполнен впервые голландским физиком Г.А. Лоренцем для кристаллов кубической системы:

$$\vec{E}_{\text{лок}} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}. \quad (14.12)$$

Эта формула также верна для газов и жидкостей, состоящих из неполярных молекул. Согласно (14.12), локальные поля в месте расположения данной молекулы всегда больше макроскопического значения, однако вне этой точки  $E_{\text{лок}} < E$ .

Так как  $\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\vec{E}$ , то

$$\vec{E}_{\text{лок}} = \vec{E} + \frac{(\epsilon - 1)}{3} \vec{E}$$

$$\text{и} \quad \frac{E_{\text{лок}}}{E} = \frac{2 + \varepsilon}{3}. \quad (14.13)$$

Подставляя  $E_{\text{лок}}$  из (14.13) в выражение (14.8), получаем

$$E(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 = n_1\alpha\varepsilon_0 \frac{2 + \varepsilon}{3} E.$$

Отсюда

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3} n_1 \alpha. \quad (14.14)$$

Приведенная формула носит название уравнения Клаузиуса–Мосотти. Как уже отмечалось, она строго применима к веществам из неполярных молекул. Для жидкостей и газов, состоящих из полярных молекул, формула (14.12) выполняется весьма приближенно, однако и для этого случая ею часто пользуются, чтобы связать микроскопические и макроскопические характеристики диэлектрика:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n_2 p_0^2}{9\varepsilon_0 kT}. \quad (14.15)$$

В заключение этого раздела сделаем два замечания.

1. Мы предположили, что вещество находится в поле с относительно малой напряженностью ( $E \ll E_{\text{ат}}$ ). По мере усиления электрического поля выражение (14.7), отражающее связь векторов  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$ , становится менее точным. Деформация отдельных молекул в поле уже не является пропорциональной приложенной силе, и как следствие поляризация нелинейным образом зависит от напряженности макроскопического поля (приведем выражение для модуля  $\vec{P}$ ):

$$P = \varepsilon_0 (\chi^{(1)} E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \dots). \quad (14.16)$$

В электростатике получить такие значения  $E$ , при которых нарушается соотношение (14.7), не удастся, ибо уже при меньших величинах  $E$  наступает пробой диэлектрика. Однако в переменных электрических полях световой волны, полученной от мощного импульсного лазера, напряженность электрического поля сопоставима с  $E_{\text{ат}}$  и поляризация среды описывается формулой (14.16). При этом возникает целый ряд интересных эффектов, обусловленных именно нелинейной связью  $P$  и  $E$ . Раз-

дел физики, изучающий такие явления, называется нелинейной оптикой.

2. В начале раздела мы оговорили, что будем обсуждать случай газообразных и жидких диэлектриков. Их свойства одинаковы по всем направлениям. В твердых телах, являющихся кристаллами, это не так. Их диэлектрические характеристики анизотропны, и приходится вводить тензоры диэлектрических восприимчивостей и проницаемостей. Для малых полей вектор поляризации будет иметь следующие проекции:

$$\begin{aligned} P_x &= \varepsilon_0 (\chi_{xx}E_x + \chi_{xy}E_y + \chi_{xz}E_z), \\ P_y &= \varepsilon_0 (\chi_{yx}E_x + \chi_{yy}E_y + \chi_{yz}E_z), \\ P_z &= \varepsilon_0 (\chi_{zx}E_x + \chi_{zy}E_y + \chi_{zz}E_z). \end{aligned} \quad (14.17)$$

Очевидно, что в общем случае векторы  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  в анизотропной среде непараллельны.

#### 14.4. Связанные заряды

При любом механизме поляризации на поверхностях диэлектрика появляются связанные заряды с поверхностной плотностью  $\sigma'$  (рис. 14.2 и 14.3). Будем считать, что вещество и электрическое поле однородны. При этом в объеме заряды диполей скомпенсированы и объемная плотность связанных зарядов  $\rho' = 0$ . Между вектором поляризации  $\vec{P}$  и величиной  $\sigma'$  существует простая связь.

Рассмотрим косой параллелепипед, помещенный в однородное электрическое поле (рис. 14.4). Дипольный момент единицы объема будет равен

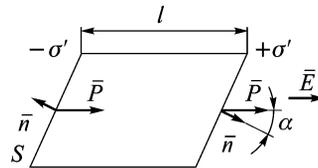


Рис. 14.4

$$P = \frac{p_E}{V} = \frac{ql}{V} = \frac{\sigma'Sl}{Sl \cos \alpha} = \frac{\sigma'}{\cos \alpha}, \quad (14.18)$$

где  $p_E$  — электрический дипольный момент всего параллелепипеда.

Отсюда

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n = \varepsilon_0 \chi E_n. \quad (14.19)$$

Таким образом, поверхностная плотность заряда равна нормальной проекции вектора поляризации, причем положительной нормалью считаем внешнюю.

### 14.5. Примеры расчета электрических полей в диэлектриках

Ранее мы ввели формулы для напряженности и потенциала поля, созданного точечным зарядом в диэлектрике. При этом мы предполагали, что однородный изотропный диэлектрик заполняет все пространство, где есть электрическое поле. Если это не так, то расчет заметно усложняется. Однако в том случае, когда границы диэлектрика совпадают с эквипотенциальными поверхностями поля сторонних зарядов, задача о нахождении поля в диэлектрике может быть легко решена.

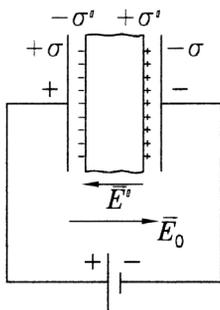


Рис. 14.5

Пусть плоскопараллельный слой изолятора размещен внутри плоского конденсатора параллельно его обкладкам (рис. 14.5). Поле внутри диэлектрика складывается из внешнего поля и поля связанных зарядов:

$$E = E_0 - E'. \quad (14.20)$$

Очевидно,  $E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$ .

Однако в соответствии с (14.19)

$$\sigma' = \epsilon_0 \chi E_n.$$

В нашем примере геометрия такова, что  $E_n = E$ . Следовательно,

$$E' = \chi E.$$

Тогда (14.20) можно записать в виде

$$E = E_0 - \chi E.$$

Отсюда

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi} = \frac{E_0}{\epsilon}.$$

Аналогичные упрощающие обстоятельства возникают при решении задачи об электрическом поле в диэлектрике при по-

гружении в него заряженной проводящей сферы радиуса  $R$ . Граница диэлектрика совпадает с эквипотенциальной поверхностью поля сторонних зарядов, размещенных на сфере. Таким образом, для точек вне сферы ( $r > R$ )

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\varepsilon r^2}.$$

## § 15. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В отличие от изоляторов в проводниках существуют свободные носители заряда, которые перемещаются под действием электрического поля на макроскопические расстояния. Подробно конкретные типы носителей мы обсудим в разделе «Постоянный электрический ток» (§ 16). Весьма ярким опытом, доказывающим наличие свободных заряженных частиц в металлах, является электризация проводника через электростатическое влияние (электростатическая индукция).

### 15.1. Поле заряженного проводника

Присутствие подвижных зарядов в проводниках приводит к ряду следствий.

1. Напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю. Если бы это было не так, то по проводнику тек бы электрический ток, а это противоречит условию электростатичности. Если поле и возникает внутри проводника, например, за счет включения внешних источников поля, то свободные носители за очень малое время перераспределяются в пространстве так, что напряженность поля внутри тела становится равной нулю. Очевидно, что отсутствие поля внутри проводника обеспечивает постоянство потенциала в объеме такого тела.

2. Вектор напряженности электрического поля перпендикулярен к поверхности проводника во всех ее точках. В противном случае по поверхности протекал бы электрический ток, что несовместимо с условием электростатичности. Из приведенного положения следует, что не только в объеме проводника, но и на его поверхности потенциал постоянен, то есть поверхность проводника эквипотенциальна.

3. Избыточные свободные заряды располагаются только на внешней поверхности проводника. Под избыточными мы будем понимать заряды, присутствие которых нарушает электронейтральность тела. Для доказательства приведенного утверждения воспользуемся теоремой Гаусса. Проведем замкнутую поверхность внутри проводника непосредственно под поверхностью, ограничивающей тело. Так как поле внутри проводника равно нулю, то равен нулю и поток вектора  $\vec{E}$  через указанную замкнутую поверхность и в соответствии с теоремой Гаусса равен нулю заряд, расположенный внутри этой поверхности. Следовательно, единственно возможная локализация избыточного заряда — в тонком слое на поверхности тела. Толщина этого слоя имеет порядок единиц нанометров, то есть  $\sim 10^{-9}$  м.

4. Обсудим, как зависит распределение избыточного заряда по поверхности проводящего тела от формы его поверхности. Для этого прежде всего найдем связь между плотностью заряда и напряженностью электрического поля в данной точке поверхности проводника. Воспользуемся опять теоремой Гаусса. Выберем в качестве замкнутой поверхности цилиндр, образующая которого перпендикулярна, а основания параллельны поверхности тела (рис. 15.1). Так как указанная поверхность может быть неплоской, а плотность заряда — переменной, то основания цилиндра должны быть физически малыми. Малой должна быть и высота цилиндра, ибо вектор  $\vec{E}$  сонаправлен с нормалью к поверхности только для точек, непосредственно примыкающих к поверхности тела. С учетом того, что поле внутри проводника равно нулю, вне его

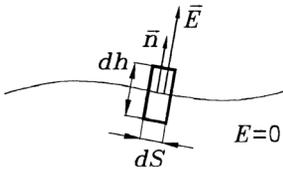


Рис. 15.1

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (15.1)$$

Далее рассмотрим простейшую модель заряженного проводника, у которого ограничивающие поверхности обладают различной кривизной. Это система из двух проводящих сфер радиусов  $R_1$  и  $R_2$ , удаленных на значительное расстояние  $l \gg R_1, R_2$  и соединенных тонким проводником (рис. 15.2).

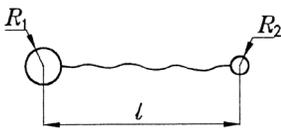


Рис. 15.2

Удаленность сфер позволяет считать, что электрическое поле вблизи поверхности каждой из них не искажено присутствием другой сферы:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{R_1^2}; \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{R_2^2}. \quad (15.2)$$

Связь между зарядами можно найти из условия эквипотенциальности поверхностей обеих сфер (они соединены проводником):

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{R_1} = \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{R_2};$$

отсюда  $\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}$ , и при подстановке этого соотношения в (15.2) получаем

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (15.3)$$

А с учетом (15.1)

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Следовательно, напряженность электрического поля в данной точке поверхности заряженного проводника обратно пропорциональна радиусу кривизны поверхности:

$$E \sim \frac{1}{R},$$

причем плотность заряда максимальна на выпуклых участках поверхности. В качестве иллюстрации приведем пример так называемого двойного конуса (рис. 15.3).

Эффект усиления электрического поля вблизи поверхности с малым радиусом закругления (острия) используется в технике и физическом эксперименте для получения экстремальных напряженностей полей. В качестве примера технического применения острия можно привести молниеотвод. В экспериментальной технике острия используют в известном из школьного курса ионном проекторе, а также в туннельном сканирующем микроскопе.

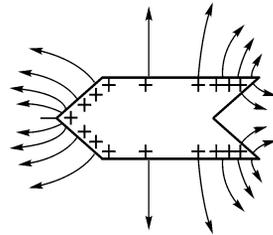


Рис. 15.3

## 15.2. Замкнутые проводящие оболочки

Рассмотрим электростатические свойства замкнутых проводящих оболочек, которые представляют собой проводящее тело, ограниченное двумя замкнутыми поверхностями (рис. 15.4). Мы

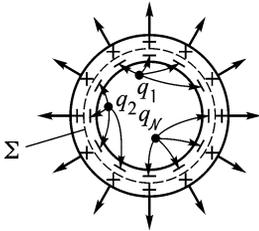


Рис. 15.4

увидим, что применение к ним теоремы Гаусса позволит сформулировать два полезных следствия, которые часто называют теоремами Фарадея. Указанные следствия были подтверждены этим ученым опытным путем.

1. Пусть в полость оболочки внесены заряды  $q_1, \dots, q_N$  (рис. 15.4). Предположим для определенности, что заряды положительные. Тогда на внутренней поверхности полости индуцируются отрицательные заряды  $q^{\text{инд}}$ , на которых будут замыкаться линии поля, вышедшие из внесенных зарядов.

Проведем мысленно замкнутую поверхность внутри проводника так, чтобы она охватывала полость (рис. 15.4). По теореме Гаусса

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \sum_{i=1}^N q_i + q^{\text{инд}} \right). \quad (15.4)$$

Так как электрическое поле внутри проводника отсутствует, то и поток в (15.4) равен нулю, а следовательно,

$$q^{\text{инд}} = - \sum_{i=1}^N q_i. \quad (15.5)$$

Соотношение (15.5) является аналитическим выражением первой теоремы Фарадея, согласно которой на поверхности полости в проводнике индуцируется заряд, равный по величине и обратный по знаку заряду, внесенному в полость.

Отметим, что вследствие электронейтральности проводящей оболочки ее полный заряд равен нулю. Поэтому в нашем примере на внешней поверхности проводника за счет ухода отрицательного заряда на поверхность полости остается нескомпенсированный положительный заряд, равный внесенному в полость. Распределение заряда по внешней поверхности тела *не зависит* от положения зарядов  $q_i$  внутри полости, ибо внешний заряд от-

делен от внутренних зарядов  $q_{\text{инд}}$  и  $q_i$  слоем проводника, в котором  $E = 0$ .

2. Теперь рассмотрим иную ситуацию: пусть заряды находятся вне проводящей оболочки (рис. 15.5). Рассуждая аналогично, мы приходим к выводу, что заряды внутри полости в этом случае не возникают. Это означает, что и поле там равно нулю. Тем самым мы, по существу, сформулировали вторую теорему Фарадея, согласно которой если в полости в проводнике нет электрических зарядов, то поле в ней отсутствует. Внешние заряды не создают в такой полости никакого электрического поля. На этом принципе основан метод электростатического экранирования с помощью заземленных проводящих оболочек.

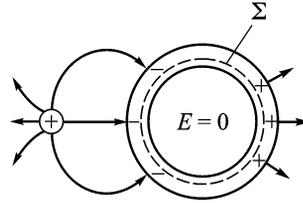


Рис. 15.5

### 15.3. Емкость

Рассмотрим систему из двух изолированных друг от друга проводящих оболочек, помещенных одна в другую (рис. 15.6). Внутреннее тело может и не содержать полости. Согласно теоремам Фарадея, электрическое поле между оболочками не зависит от внешних зарядов, и заряды на поверхностях, обращенных друг к другу, равны по величине и противоположны по знаку. Такая система проводников называется конденсатором, а сами оболочки — обкладками. Если пространство между оболочками заполнено вакуумом, жидким или газообразным диэлектриком, электрическое поле  $\vec{E}$  внутри конденсатора всегда пропорционально заряду обкладок. Следовательно, разность потенциалов

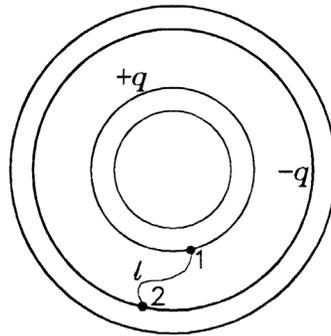


Рис. 15.6

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \frac{q}{C}, \quad (15.6)$$

где  $1/C$  — коэффициент пропорциональности, зависящий только от формы, размеров обкладок и от диэлектрических свойств

среды между обкладками. Под зарядом конденсатора  $q$  имеют в виду заряд, находящийся на положительно заряженной обкладке.

Параметр  $C$  называют *емкостью* или просто *емкостью* конденсатора. Единицей измерения емкости  $C$  в системе СИ является фарад (1 Ф = 1 Кл/1 В).

Аналитически емкость можно вычислить для ограниченного числа систем, обладающих плоской, цилиндрической и сферической симметрией. Обкладки в таких системах не обязательно замкнутые, однако необходимым условием является близость расположения обкладок по сравнению с их размерами. Этим достигается независимость электрического поля внутри конденсатора от внешних полей.

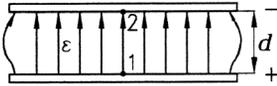


Рис. 15.7

В качестве примера найдем емкость так называемого плоского конденсатора — системы из двух параллельных проводящих плоскостей площадью  $S$ , отстоящих друг от друга на расстоянии

$d$  (рис. 15.7). Будем считать, что  $d \ll \sqrt{S}$ .

Поле внутри плоского конденсатора практически однородно, и его напряженность равна

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Разность потенциалов между обкладками найдем интегрированием вдоль силовой линии:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{qd}{\epsilon\epsilon_0 S}.$$

Отсюда величина емкости

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}. \quad (15.7)$$

По такой же схеме вычисляется емкость и для конденсаторов иной формы.

Если имеется прибор для измерения емкости, то, регистрируя величину емкости плоского конденсатора при наличии и в отсутствие диэлектрика,  $C$  и  $C_0$  соответственно, можно определить величину анализируемого материала:

$$\epsilon = \frac{C}{C_0}.$$

При этом необходимо, чтобы однородный диэлектрик заполнял все пространство между обкладками, где существует электрическое поле.

Конденсаторы можно соединять последовательно и параллельно в батарее. При последовательном включении  $\mathcal{N}$  конденсаторов при зарядке на каждом конденсаторе накапливается один и тот же заряд, и общая разность потенциалов на батарее

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \dots + \frac{q}{C_{\mathcal{N}}}. \quad (15.8)$$

Поделив правую и левую части (15.8) на  $q$ , получаем

$$\frac{1}{C_{\text{посл}}} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{1}{C_i}. \quad (15.9)$$

При параллельном соединении  $\mathcal{N}$  конденсаторов все они находятся при одном значении разности потенциалов, и общий заряд

$$q_{\text{общ}} = C_1(\varphi_1 - \varphi_2) + C_2(\varphi_1 - \varphi_2) + \dots + C_{\mathcal{N}}(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Отсюда

$$C_{\text{пар}} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} C_i. \quad (15.10)$$

Иногда говорят о емкости уединенного проводника. В этом случае второй обкладкой являются удаленные предметы, Земля. Потенциал и заряд такого тела связаны соотношением

$$q = C \varphi \quad (15.11)$$

при условии, что в бесконечно удаленных точках принимается  $\varphi = 0$ . То есть емкость уединенного проводника численно равна заряду, сообщенного проводнику повышает его потенциал на единицу.

Так, для сферы

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R.$$

Емкость уединенных проводников относительно мала, в частности, земной шар обладает емкостью  $\sim 700$  мкФ, в то время как в современной технике используются компактные конденсаторы с емкостью 20–30 мФ и более.

### 15.4. Энергия электрического поля

Если заряженный конденсатор замкнуть проводником, то во внешней цепи в процессе разряда будет идти ток и проводник нагреется. Следовательно, конденсатор обладает энергией. Найдем работу, совершаемую силами электрического поля по перемещению зарядов при замыкании конденсатора. Элементарная работа

$$dA = (\varphi_1 - \varphi_2) |dq| = \Delta\varphi |dq| \quad (15.12)$$

должна быть положительна. Здесь и далее символом  $\Delta\varphi$  обозначена разность потенциалов между точками 1 и 2. Так как величина  $q$  убывает при разрядке конденсатора, то

$$|dq| = -dq = -Cd(\Delta\varphi), \quad (15.13)$$

поэтому при уменьшении разности потенциалов от значения  $\Delta\varphi_1$  до значения  $\Delta\varphi_2$  силы поля совершают работу

$$A_{12} = \int_{\Delta\varphi_1}^{\Delta\varphi_2} -C\Delta\varphi d(\Delta\varphi) = \frac{C(\Delta\varphi_1)^2}{2} - \frac{C(\Delta\varphi_2)^2}{2}. \quad (15.14)$$

С другой стороны, эта работа определяется разностью потенциальных энергий в начальном и конечном состояниях:

$$A_{12} = U_1 - U_2. \quad (15.15)$$

Сопоставляя (15.14) и (15.15), легко видеть, что в качестве потенциальной энергии конденсатора можно взять выражения

$$U = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\Delta\varphi}{2}. \quad (15.16)$$

Возникает вопрос: с чем связана эта энергия? В электростатике правомерны два ответа: это потенциальная энергия притяжения заряженных обкладок, и это энергия электрического поля, существующего между обкладками. Только опыты с переменными электромагнитными полями свидетельствуют о том, что носителем энергии является именно электрическое поле.

Используя (15.7) и (15.16), выразим энергию плоского конденсатора через напряженность однородного электрического поля в нем:

$$U_E = \frac{S\varepsilon\varepsilon_0}{2d} \cdot (Ed)^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} E^2 Sd = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} E^2 V, \quad (15.17)$$

где  $V$  — объем области между обкладками конденсатора. Введем объемную плотность энергии электрического поля:

$$\omega_E(\vec{r}) = \frac{dU_E}{dV}.$$

Мы получили, что в случае однородного поля

$$\omega_E(\vec{r}) = \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} E^2(\vec{r}). \quad (15.18)$$

Если электрическое поле неоднородно, можно выделить элементарные участки, в пределах которых это поле однородно, поэтому формула (15.18) применима не только к однородным, но и к произвольным полям. Она оказывается справедливой также для переменных электрических полей. Зная напряженность поля как функцию координат, можно вычислить энергию, которой обладает данное электрическое поле в области пространства объемом  $V$ :

$$U_E = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \epsilon E^2(\vec{r}) dV. \quad (15.19)$$

## § 16. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Если за счет действия внешних факторов между концами проводника поддерживается определенная разность потенциалов, то внутри проводника существует электрическое поле, обуславливающее движение зарядов, или *электрический ток*. Последний представляет собой *упорядоченное* движение зарядов, или носителей тока. Указанное упорядоченное движение накладывается на хаотическое, беспорядочное перемещение микрочастиц, всегда существующее в телах.

В металлах носителями тока являются электроны, в электролитах — положительные и отрицательные ионы, в газах — ионы и электроны, в полупроводниках — электроны и дырки. За *направление тока* условно принимается направление движения *положительных* зарядов. Следовательно, в металлах направления тока и движения электронов противоположны. В настоящем параграфе мы будем рассматривать *стационарные*, или *постоянные*, токи, которые не изменяются во времени.

### 16.1. Плотность и сила электрического тока

Количественными характеристиками электрического тока являются *плотность и сила тока*.

Пусть в некоторой проводящей среде присутствуют носители тока только одного типа. Выделим физически малый объем, в котором средняя скорость упорядоченного движения зарядов равна  $\vec{v}$ . Эту скорость называют дрейфовой, имея в виду, что частицы перемещаются под действием электрических сил. Будем считать, что рассматриваемый объем представляет собой цилиндр с образующей, параллельной вектору  $\vec{v}$ , и основаниями, перпендикулярными

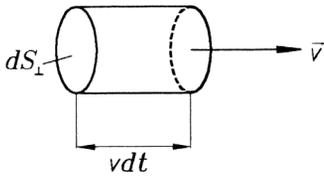


Рис. 16.1

$\vec{v}$  (рис. 16.1). Тогда за малое время  $dt$  заряды сместятся на расстояние  $vdt$ , перенесены при этом через левое основание цилиндра площадью  $dS_{\perp}$  (рис. 16.1) заряд

$$dq = vdt \cdot dS_{\perp} en, \quad (16.1)$$

где  $e$  — заряд одной частицы,  $n$  — их концентрация. Следовательно, за единицу времени через основание единичной площади, перпендикулярное вектору  $\vec{v}$ , переносится заряд

$$j = \frac{dq}{dS_{\perp} dt} = env. \quad (16.2)$$

Если в правую часть (16.2) подставить вектор скорости, то получим выражение для *вектора плотности электрического тока*

$$\vec{j} = en\vec{v}. \quad (16.3)$$

Эту характеристику можно определить следующим образом: *плотностью электрического тока назовем вектор, направление которого совпадает с направлением упорядоченного движения положительных носителей тока, а величина равна заряду, переносимому в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную току*. Как уже отмечалось в § 10, для векторной функции  $\vec{j}(\vec{r})$  можно ввести понятие линий тока.

Единицей измерения плотности электрического тока  $j$  в системе СИ является ампер на квадратный метр ( $\text{А/м}^2$ ).

Если в проводящей среде одновременно существует несколько типов носителей тока, то плотность тока можно выразить следующим образом:

$$\vec{j} = \sum_{i=1}^N e_i n_i \vec{V}_i,$$

где  $e_i$ ,  $n_i$  и  $\vec{V}_i$  — заряд, концентрация и скорость упорядоченного движения частиц  $i$ -го типа соответственно.

Другой характеристикой электрического тока является *скалярная величина, равная заряду, переносимому через данную площадку в единицу времени, и называемая силой тока*:

$$I = \left. \frac{dq}{dt} \right|_{\Sigma}. \quad (16.4)$$

Единицей измерения силы тока  $I$  в системе СИ является ампер (А), определение которого будет дано в разд. 17.3.

Очевидно, сила тока представляет собой поток заряда через известную поверхность  $\Sigma$  и может быть связана с плотностью тока соотношением

$$I = \int_{\Sigma} \vec{j} d\vec{S}. \quad (16.5)$$

Пусть поверхность  $\Sigma$  замкнута, тогда сила тока отражает скорость изменения заряда внутри этой поверхности. Если  $I > 0$ , то указанный заряд убывает; если  $I < 0$ , то заряд накапливается:

$$\frac{dq}{dt} = -\oint_{\Sigma} \vec{j} d\vec{S}. \quad (16.6)$$

Это — аналитическая запись закона изменения заряда. Если  $\vec{j} = 0$ , то есть поверхность непроницаема для носителей тока, то и  $\frac{dq}{dt} = 0$ , то есть  $q = \text{const}$ , и мы приходим к закону сохранения заряда (§ 10).

Для постоянного тока сохранение заряда осуществляется и при  $\vec{j} \neq 0$ . Действительно, если токи постоянны, заряд в любом рассматриваемом объеме не накапливается и не убывает. Отсюда

$$\oint_{\Sigma} \vec{j} d\vec{S} = 0. \quad (16.7)$$

Выражение (16.7) справедливо для векторных полей с *замкнутыми линиями*. Очевидно, линии такого поля всегда пересекают замкнутую поверхность четное число раз, что и соответствует формуле (16.7). Таким образом, мы приходим к выводу, что *линии постоянного тока всегда замкнуты*.

## 16.2. Закон Ома в дифференциальной форме

Как уже отмечалось в начале данного параграфа, создать электрический ток в теле можно только поддерживая в нем электрическое поле. Опыт показывает, что для многих тел плотность тока в данной точке в широких пределах пропорциональна напряженности электрического поля в той же точке:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{1}{\rho(\vec{r})} \vec{E}(\vec{r}). \quad (16.8)$$

Соотношение (16.8) носит название *закона Ома в дифференциальной* (локальной) форме. Отметим, что (16.8) выполняется для физически однородных тел.

Величина  $\rho(\vec{r})$  называется *удельным сопротивлением* вещества, из которого сформировано проводящее тело. Единицей измерения удельного сопротивления в системе СИ является ом-метр (Ом·м).

На первый взгляд может показаться, что закон Ома противоречит второму закону динамики. Действительно, сравнивая формулы (16.3) и (16.8), мы видим, что скорость упорядоченного движения зарядов  $\vec{v}$  пропорциональна напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , а следовательно, и силе  $\vec{F} = e\vec{E}$ , действующей на заряды. Однако, согласно законам Ньютона, не скорость, а ускорение заряженных частиц должно быть пропорционально указанной силе.

Противоречие легко разрешается, если предположить, что движение частиц происходит в среде с сопротивлением, причем сила сопротивления пропорциональна скорости упорядоченного движения зарядов. Первоначально рассмотрим движение носителей заряда в металлах. Строго говоря, классический подход в этом случае неприменим, и нужно следовать квантово-механическим представлениям. Однако, используя классическое уравнение движения, можно получить соотношения, качественно описывающие процесс протекания электрического тока в металлах, хотя количественно формулы могут быть неверны.

Пусть электрическое поле в проводнике однородно, тогда все электроны движутся с одной и той же дрейфовой скоростью  $\vec{V}$ . Следовательно, второй закон Ньютона может быть записан следующим образом:

$$m \frac{d(\vec{V} + \vec{V}_6)}{dt} = e\vec{E} + \vec{F}_c, \quad (16.9)$$

где  $m$  — масса электрона,  $\vec{V}_6$  — скорость беспорядочного движения электронов,  $\vec{F}_c$  — сила сопротивления движению.

Если уравнение (16.9) усреднить по всем электронам, принимающим участие в переносе заряда, то

$$\left\langle \frac{d(\vec{V} + \vec{V}_6)}{dt} \right\rangle = \frac{d\vec{V}}{dt},$$

а величина  $\vec{F}_c$  заменится ее средним значением.

Величина  $\vec{F}_c$  в металлах определяется столкновениями электронов с ионами решетки (столкновения между электронами не изменяют их суммарного импульса и не сказываются на протекании тока). Если дрейфовое движение отсутствует, то есть  $\vec{V} = 0$ , то и  $\vec{F}_c = 0$ . При малых значениях  $V$  по сравнению с  $V_6$  величину  $\vec{F}_c$  можно разложить в ряд по степеням  $V$  и ограничиться только первым членом:

$$\vec{F}_c = -\frac{m}{\tau} \vec{V}, \quad (16.10)$$

где  $\tau$  — среднее время между столкновениями электрона с ионами решетки.

Тогда для постоянного во времени электрического поля

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \vec{V} = \frac{e\vec{E}}{m} \tau. \quad (16.11)$$

Отсюда, подставляя (16.11) в (16.3), получаем

$$\vec{j} = \frac{e^2 n}{m} \tau \vec{E}, \quad (16.12)$$

следовательно,

$$\rho = \frac{m}{e^2 n \tau}. \quad (16.13)$$

Зная величины  $\rho$ ,  $m$ ,  $n$  и  $e$ , можно рассчитать параметр  $\tau$  для любого металла. В частности, для меди  $\tau \sim 2 \cdot 10^{-14}$  с.

Если за время между столкновениями электрон наберет дрейфовую скорость, сопоставимую с  $v_6$ , то в соотношении (16.10) будет необходимо учитывать более высокие члены разложения. Это приведет к нарушению линейной связи  $\vec{F}$  и  $\vec{E}$ , следовательно, закон Ома будет неприменим. В металлах  $v_6 \sim 10^6$  м/с. Для достижения такой скорости, согласно (16.11), необходимо электрическое поле  $E \sim 10^8$  В/м. Технически возможным значением напряженности поля в меди является величина поля  $E \sim 0,15$  В/м (проводник еще не плавится), что на девять порядков меньше величины, при которой возможно нарушение закона Ома.

В ионизованных газах при низких давлениях длина свободного пробега электрона велика, и легко реализуется случай, когда  $v \sim v_6$ . Для таких сред рассматриваемый закон неприменим.

Закон Ома является одним из важнейших эмпирических законов физики. Трудно переоценить его роль для практических приложений, то есть для электротехники. Однако рассмотренное выше ограничение в применении этого закона к некоторым средам (в нашем примере к газам) *не позволяет* считать закон Ома фундаментальным физическим принципом.

### 16.3. Закона Джоуля—Ленца в дифференциальной форме

Из опыта известно, что при протекании электрического тока по проводникам последние нагреваются. Следовательно, часть энергии, приобретаемой зарядами в электрическом поле, переходит в тепловую форму. Вычислим количество теплоты, выделяемое в *неподвижном металлическом* проводнике. Сделаем также вполне очевидное для металлов предположение, что электрический ток *не инициирует* никаких химических реакций.

При приложении к металлическому проводнику разности потенциалов электроны движутся в поле  $\vec{E}$ . Мощность силы, действующей на один электрон,

$$W_1 = (\vec{v} + \vec{v}_6)e\vec{E}. \quad (16.14)$$

Вектор скорости беспорядочного движения  $\vec{v}_6$  меняет свое направление и величину при каждом столкновении электрона с другими микрочастицами вещества. Чтобы исключить этот неопределенный вклад в мощность силы, усредним (16.14) по

времени, существенно превышающем время свободного пробега электрона между столкновениями:

$$\langle W_1 \rangle = \langle e(\vec{V} + \vec{v}_6)\vec{E} \rangle = \langle e\vec{V}\vec{E} \rangle + \langle e\vec{v}_6\vec{E} \rangle.$$

Очевидно, что

$$\langle e\vec{v}_6\vec{E} \rangle = 0, \quad \text{и} \quad \langle W_1 \rangle = e\vec{V}\vec{E}. \quad (16.15)$$

В единице объема проводника с током мощность сил электрического поля

$$W_{\text{уд}} = en\vec{V}\vec{E}, \quad (16.16)$$

где  $n$  — концентрация электронов.

Так как мы предположили, что проводник не движется и в нем не идут химические реакции, то вся указанная мощность переходит в тепловую мощность. Следовательно, в единице объема металла в единицу времени выделяется количество теплоты:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta V \cdot \Delta t} = \frac{\Delta Q_{\text{уд}}}{\Delta t} = W_{\text{уд}} = en\vec{V}\vec{E}, \quad (16.17)$$

или с учетом (16.3)

$$\frac{\Delta Q_{\text{уд}}}{\Delta t} = \vec{j}\vec{E}. \quad (16.18)$$

Воспользовавшись законом Ома в дифференциальной форме (16.8), получим также

$$\frac{\Delta Q_{\text{уд}}}{\Delta t} = \rho j^2 = \frac{1}{\rho} E^2. \quad (16.19)$$

Выражение (16.18) связывает выделение тепла в физически малом объеме металлического проводника с плотностью тока в том же малом объеме, то есть в той же физической точке, и носит название закона *Джоуля—Ленца* в *дифференциальной* (локальной) форме.

Выражение (16.18) носит общий характер, то есть не зависит от природы сил, возбуждающих электрический ток. Интересно отметить, что рассматриваемый закон справедлив и для электролитов. Это означает, что работа тока не расходуется на создание ионов.

### 16.4. Закон Ома в интегральной форме

Опыт показывает, что при замыкании заряженного конденсатора на проводник в последнем возникает ток, который уменьшается со временем до нуля. Это довольно естественный результат, ибо, как мы знаем из электростатики, кулоновские силы перераспределяют избыточные заряды на проводниках таким образом, чтобы электрическое поле в проводнике отсутствовало.

Следовательно, для поддержания в проводнике постоянного тока на каком-то участке замкнутой цепи должны действовать силы, перемещающие заряды против сил электростатического поля. Такие силы, в отличие от кулоновских, называют *сторонними*. Они существуют в пределах *источника* тока. В гальванических элементах и аккумуляторах роль сторонних сил играют так называемые «химические силы». В генераторах, преобразующих механическую работу в электрическую энергию, — это силы вихревого (неэлектростатического) электрического поля.

Используя закон Ома в локальной форме, мы можем связать разность потенциалов, приложенную к проводнику, с силой тока, текущего по нему. Для этого прежде всего мы должны учесть присутствие сторонних сил  $\vec{F}^{\text{стор}}$ , действующих на заряды. По аналогии с введенным ранее понятием напряженности электростатического поля можно ввести вектор напряженности поля сторонних сил

$$\vec{E}^{\text{стор}} = \frac{\vec{F}^{\text{стор}}}{e}. \quad (16.20)$$

Тогда закон Ома с учетом кулоновских сил и сторонних сил приобретает вид

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стор}}). \quad (16.21)$$

Для перехода к проводнику конечных размеров нам необходимо задаться конкретной моделью. Пусть токи текут по тонким проводам, помещенным в изолирующую среду (воздух, вакуум, диэлектрик). Пусть площадь сечения провода равна  $S$ , причем  $S$  может быть и неодинаковой по длине провода. Тогда появляются три упрощающих обстоятельства.

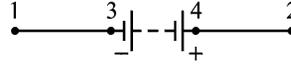
1. Направления векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{j}$  совпадают с осью провода.
2. Плотность тока  $j$  можно считать постоянной по сечению провода (но не вдоль него).

3. Сила постоянного тока неизменна вдоль всего провода:

$$I = jS = \text{const.} \quad (16.22)$$

Такой подход называется приближением *тонкого провода*.

Будем считать, что в цепи присутствует источник тока (рис. 16.2). Источником тока называется устройство, в котором действуют сторонние силы.



Запишем закон Ома в виде

$$\vec{E} + \vec{E}^{\text{стоп}} = \rho \vec{j}. \quad (16.23)$$

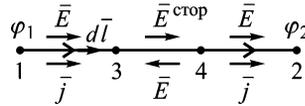


Рис. 16.2

Зададим направление движения (обхода) по проводнику от точки 1 до точки 2. Домножим (16.23) на вектор  $d\vec{l}$ , ориентированный вдоль оси провода (рис. 16.2), и проинтегрируем полученное выражение от точки 1 до точки 2:

$$\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}^{\text{стоп}} d\vec{l} = \int_1^2 \rho \vec{j} d\vec{l}. \quad (16.24)$$

Проанализируем последовательно интегралы в (16.24).

1. Первый интеграл в левой части (16.24) определяет работу кулоновских сил по перемещению единичного положительного заряда между точками 1 и 2 и является разностью потенциалов:

$$\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (16.25)$$

2. Второй интеграл в левой части (16.24) равен работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда между точками 1 и 2. Так как указанные силы действуют только в источнике тока, то  $\vec{E}^{\text{стоп}}$  равно нулю везде, кроме интервала между точками 3 и 4 (рис. 16.2). Следовательно,

$$\int_1^2 \vec{E}^{\text{стоп}} d\vec{l} = \int_3^4 \vec{E}^{\text{стоп}} d\vec{l} = \mathcal{E}_{12}. \quad (16.26)$$

Величина  $\mathcal{E}_{12}$  в (16.26) называется *электродвижущей силой* (ЭДС) на участке цепи  $1 \rightarrow 2$ . Работа сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда, а значит, и электродвижущая сила на участке цепи  $1 \rightarrow 2$ , будет положительной,

если при обходе в направлении  $1 \rightarrow 2$  источник тока проходится от отрицательного полюса к положительному, то есть сторонняя сила способствует движению положительных носителей заряда по направлению обхода. Очевидно, единица измерения ЭДС — вольт (В).

3. Интеграл в правой части можно преобразовать следующим образом:

$$\int_1^2 \rho \vec{j} d\vec{l} = \int_1^2 \rho j dl = I \int_1^2 \frac{\rho dl}{S} = IR_{\text{п}}, \quad (16.27)$$

где  $R_{\text{п}} = \int_1^2 \frac{\rho dl}{S}$  — полное сопротивление цепи. Его обычно разбивают на две части:

$$R_{\text{п}} = R + r, \quad (16.28)$$

где  $R$  — сопротивление проводов,  $r$  — внутреннее сопротивление источника тока. Для однородного проводника постоянного сечения

$$R = \rho \frac{l}{S}.$$

Сила тока на участке цепи выбирается положительной, если ток течет по направлению обхода контура.

Таким образом, заменяя интегралы в (16.24) на выражения в правых частях (16.25), (16.26) и (16.27), получаем

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} = I(R + r),$$

или

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R + r}. \quad (16.29)$$

Это закон Ома в *интегральной* форме для участка цепи, содержащей ЭДС. Работа кулоновских и сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда между точками 1 и 2 называется *электрическим напряжением на участке цепи*  $1 \rightarrow 2$   $\mathcal{U}_{12}$ :

$$\mathcal{U}_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (16.30)$$

Можно рассмотреть два частных случая для соотношения (16.29):

1. Участок цепи не содержит источника тока (ЭДС), то есть  $\mathcal{E}_{12} = 0$ ,  $r = 0$ . Тогда закон Ома для однородного участка цепи принимает вид

$$I = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}, \quad (16.31)$$

причем электрическое напряжение совпадает с разностью потенциалов:

$$\mathcal{U}_{12} = \Phi_1 - \Phi_2.$$

2. Точки 1 и 2 совпадают, то есть цепь замкнута. Тогда, очевидно,  $\Phi_1 = \Phi_2$  и

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (16.32)$$

Совместное решение (16.31) и (16.32) позволяет получить отношение разности потенциалов между полюсами источника тока к величине его ЭДС:

$$\frac{\Phi_3 - \Phi_4}{\mathcal{E}} = \frac{R}{R + r}.$$

Разность потенциалов между полюсами источника тока стремится к значению ЭДС при  $R \rightarrow \infty$ , то есть при разомкнутой внешней цепи. Отсюда ясен способ измерения ЭДС: необходимо использовать вольтметр с высоким сопротивлением ( $R \gg r$ ).

Проводники можно соединять последовательно и параллельно. Результирующее сопротивление цепи при последовательном соединении

$$R_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} R_i;$$

при параллельном соединении

$$\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{1}{R_i}.$$

## 16.5. Закон Джоуля–Ленца в интегральной форме

Как и в предыдущем разделе, воспользуемся моделью тонкого провода и вычислим количество тепла  $\Delta Q/\Delta t$ , выделяемое в единицу времени в этом проводнике при протекании по нему

электрического тока. Как и в разд. 16.3, будем считать, что проводник не движется и химические реакции в нем не протекают. По существу, нам необходимо проинтегрировать соотношение (16.19) по объему провода. Так как в нашей модели плотность тока постоянна по сечению провода, то элемент объема можно представить в виде

$$dV = S dl.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Q}{\Delta t} &= \int_1^2 \rho j^2 S dl = \int_1^2 \rho \frac{j^2 S^2}{S} dl = I^2 \int_1^2 \frac{\rho dl}{S} = I^2 R_{\text{пр}}, \\ \frac{\Delta Q}{\Delta t} &= I^2 R_{\text{пр}}. \end{aligned} \quad (16.33)$$

Выражение (16.33) представляет аналитическую форму закона Джоуля–Ленца в *интегральной* форме. Воспользовавшись выражениями (16.29)–(16.31), можно записать:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = I^2 R_{\text{пр}} = I \mathcal{U}_{12} = \frac{\mathcal{U}_{12}^2}{R_{\text{пр}}}.$$

Если рассмотреть замкнутую цепь, то

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = I^2 (R + r) = I \mathcal{E} = I \oint \vec{E}^{\text{стоп}} d\vec{l}. \quad (16.34)$$

Из (16.34) следует, что количество тепла, выделяемое за единицу времени во всей цепи, равно мощности только сторонних сил. Роль электростатического поля сводится лишь к перераспределению тепла по цепи.

Назовем работой тока работу, совершаемую кулоновскими и сторонними силами на участке цепи  $1 \rightarrow 2$ :

$$A_{\text{T}} = \mathcal{U}_{12} q = \mathcal{U}_{12} I \Delta t. \quad (16.35)$$

Разделив работу на время, в течение которого она совершается, получим мощность, развиваемую током на указанном участке цепи:

$$W_{\text{T}} = I \mathcal{U}_{12}.$$

Единицей измерения мощности тока  $W_{\text{T}}$  в системе СИ является ватт ( $1 \text{ Вт} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ В}$ ).

Если допустить возможность совершения механической работы или протекания химических реакций при прохождении тока по цепи, то не вся работа тока будет тратиться на нагревание проводников, и

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} \neq W_{\text{т.}}$$

### 16.6. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

С помощью закона Ома в интегральной форме рассчитывают силы токов по заданным величинам ЭДС и полным сопротивлениям только в простейших случаях, когда цепь можно свести к одному неразветвленному контуру. Для разветвленных цепей весьма удобно использовать так называемые *правила Кирхгофа*. Сформулируем их, анализируя конкретный пример (рис. 16.3).

Введем два определения.

1) *Узлом* называется точка цепи, в которой сходятся три и более проводника (точки  $U_1, U_2, U_3$  на рис. 16.3).

2) *Контуром* называется любая замкнутая цепь, выделенная в разветвленной цепи (фрагмент цепи на рис. 16.3).

Пусть во всей цепи имеется  $M$  узлов. Из закона сохранения заряда для стационарных токов (разд. 16.1) следует первое правило: *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю*:

$$\sum_{i=1} I_i = 0. \tag{16.36}$$

Из  $M$  уравнений (16.36) независимыми являются  $(M - 1)$ .

Обычно токам, входящим в узел, приписывают знак плюс, выходящим из узла — минус. В нашем примере для точки  $U_3$  уравнение (16.36) имеет вид

$$I_1 - I_2 - I_4 = 0.$$

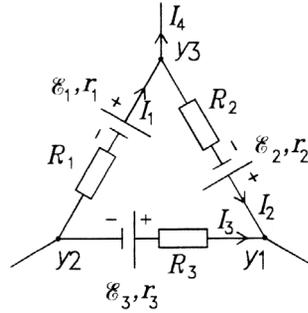


Рис. 16.3

С целью вывода второго правила Кирхгофа запишем закон Ома (16.29) для неразветвленных участков выделенного контура:

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_3 = I_3(R_3 + r_3),$$

$$\varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_1 = I_1(R_1 + r_1),$$

$$\varphi_3 - \varphi_1 + \mathcal{E}_2 = I_2(R_2 + r_2).$$

При сложении этих уравнений получаем

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i I_i(R_i + r_i). \quad (16.37)$$

Таким образом, для любого (замкнутого) контура разветвленной цепи алгебраическая сумма ЭДС, действующих в контуре, равна алгебраической сумме произведений сил токов в отдельных участках этого контура на их полные сопротивления.

Число независимых уравнений типа (16.37) оказывается равным числу разрывов, которые следует сделать в цепи, чтобы нарушить все контуры, или числу простых контуров. В итоге по заданным величинам  $\mathcal{E}_i$ ,  $R_i$  и  $r_i$  можно найти значения сил токов, текущих по всем участкам анализируемой цепи.

При практическом использовании правил Кирхгофа произвольно выбираются направления обхода контуров и направления токов в неразветвленных участках цепи. Токи, входящие в уравнения (16.37), считаются положительными, если направление обхода контура совпадает с направлением тока. В нашем примере (рис. 16.3) при обходе контура по часовой стрелке второе правило Кирхгофа имеет вид

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 = I_1(R_1 + r_1) + I_2(R_2 + r_2) - I_3(R_3 + r_3).$$

Если в результате расчета получаемая величина силы тока положительна, то направление тока было выбрано правильно. В противном случае ток в действительности течет в направлении, обратном выбранному первоначально.

## 16.7. Стационарные токи в массивных проводниках

При выводе законов Ома и Джоуля–Ленца в интегральной форме мы использовали модель тонкого провода, которая предполагает, что линии тока существуют только в пределах одно-

мерного хорошо проводящего объекта. Пространство вне проводника заполнено изолятором.

Возможна и иная ситуация, при которой ток протекает в трехмерной плохо проводящей среде за счет того, что в эту среду помещены металлические электроды и между ними поддерживается разность потенциалов (рис. 16.4). При этом предполагается, что удельное сопротивление среды  $\rho$  много больше удельного сопротивления материала электродов  $\rho_m$ . В этом случае поверхность электрода эквипотенциальна. С задачами такого рода мы сталкиваемся при рассмотрении токов утечки в конденсаторе через неидеальный диэлектрик, при объяснении использования заземления в телефонной и телеграфной связи.

Будем считать среду однородной ( $\rho = \text{const}$ ,  $\epsilon = \text{const}$ ). Так как токи стационарны, то не происходит накопления заряда в какой-либо точке. Следовательно, потенциалы во всех точках среды постоянны во времени и принимают некоторые значения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  на металлических электродах. Можно показать, что, если проводящую среду заменить на идеальный однородный диэлектрик, распределение напряженности электрического поля  $\vec{E}(\vec{r})$  и потенциала  $\varphi(\vec{r})$  не изменится. То есть рассматриваемая задача полностью эквивалентна электростатической.

Ранее (разд. 16.1) нами было показано, что для стационарного тока для любой замкнутой поверхности

$$\oint_{\Sigma_1} \vec{j} d\vec{S} = 0. \tag{16.38}$$

Пусть  $\Sigma_1$  — поверхность первого электрода. Область интегрирования в (16.38) можно разбить на две части — всю поверхность тела  $\Sigma'_1$ , за исключением точки подключения источника тока (точка 1 на рис. 16.4), и саму точку 1:

$$\int_{\Sigma'_1} \vec{j} d\vec{S} + \int_{\tau.1} \vec{j} d\vec{S} = 0.$$

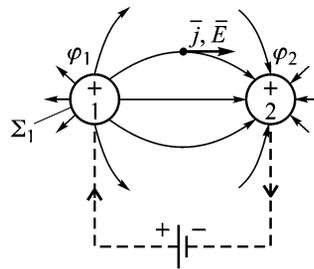


Рис. 16.4

Очевидно, интегралы равны друг другу по величине, противоположны по знаку и представляют собой токи, текущие по среде ( $\Sigma'_1$ ) и по подводящему проводнику (точка 1).

Как мы уже отмечали, электрическое поле между электродами полностью совпадает с электростатическим, и, следовательно, можно воспользоваться теоремой Гаусса (при этом интегрирование по  $\Sigma_1$  или  $\Sigma'_1$  дает один и тот же результат):

$$\oint_{\Sigma_1} \vec{E} d\vec{S} = \int_{\Sigma'_1} \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Так как  $I_{\text{cp}} = \int_{\Sigma} \vec{j} d\vec{S}$ , то, поделив части этого соотношения на удельное сопротивление среды, получаем значение силы тока, текущего по среде:

$$I_{\text{cp}} = \frac{1}{\rho} \int_{\Sigma'_1} \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\rho\epsilon\epsilon_0}. \quad (16.39)$$

Если известна емкость для заданной конфигурации электродов, то заряд  $q$  можно выразить через разность потенциалов:

$$q = C(\varphi_1 - \varphi_2).$$

С учетом этого (16.39) приобретает вид

$$I_{\text{cp}} = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)}{\rho\epsilon\epsilon_0}.$$

Отсюда получаем, что сопротивление среды между электродами

$$R_{\text{cp}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I_{\text{cp}}} = \frac{\rho\epsilon\epsilon_0}{C}. \quad (16.40)$$

В качестве примера определим сопротивление утечки в цилиндрическом конденсаторе. Емкость такого конденсатора

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln \frac{b}{a}},$$

где  $a$  и  $b$  — радиусы обкладок,  $l$  — длина обкладок конденсатора. Отсюда

$$R_{\text{cp}} = \frac{\rho \ln \frac{a}{b}}{2\pi l}.$$

Так как емкость между электродами всегда пропорциональна  $\epsilon$ , то величина  $R_{\text{cp}}$  не зависит от этой характеристики среды.

## § 17. ЗАКОНЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТОКОВ

В двадцатые годы XIX в. было установлено, что электрические токи действуют на постоянные магниты, и наоборот, магниты действуют на токи. Это взаимодействие было открыто и подробно изучено А. Ампером и Х. Эрстедом.

В результате проведения многочисленных опытов было показано, что взаимодействие проводников с током аналогично действию токов на постоянные магниты и магнитов на токи. Поэтому указанный вид взаимодействия получил название *магнитного* взаимодействия.

Отметим существенное отличие магнитного взаимодействия от рассмотренного выше электростатического взаимодействия зарядов. Последнее зависит от величины зарядов. Магнитное взаимодействие возникает лишь *при движении зарядов*, в частности при наличии токов в проводниках, и зависит от величины этих токов.

Начнем изучение магнитных явлений для случая проводников, находящихся в вакууме.

### 17.1. Закон Ампера для элементов тока

В настоящем разделе, опираясь на результаты опытов, проведенных Ампером, путем логических рассуждений мы установим закон взаимодействия проводников с током.

1. Ампер показал, что сила взаимодействия указанных проводников прямо пропорциональна силам токов, текущих в каждом из них:

$$F_{21} \sim I_1 \cdot I_2. \quad (17.1)$$

2. Оказалось, что при анализе взаимодействия токов удобно ввести так называемый *элемент тока*, определяемый как *произведение силы тока, текущего по тонкому проводнику, на малый направленный отрезок* этого проводника (рис. 17.1):  $I d\vec{l}$ . Вектор  $d\vec{l}$  направлен по току. Элемент тока играет в магнетизме ту же роль, что и точечный заряд в электростатике. Вместе с тем эти объекты существенно различаются: точечный заряд моделирует реальную заряженную частицу малых размеров, а эле-

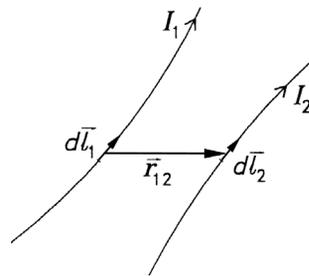


Рис. 17.1

мент тока — гипотетический объект, ибо для протекания тока необходима замкнутая цепь, и элемент тока в этой цепи можно выделить лишь мысленно.

С учетом вышесказанного доля силы взаимодействия между проводниками с током, обусловленная вкладом элементов тока  $I_1 d\vec{l}_1$  и  $I_2 d\vec{l}_2$

$$dF_{21} \sim I_1 dl_1 \cdot I_2 dl_2. \quad (17.2)$$

3. Очевидно, что сила  $d\vec{F}_{21}$  будет зависеть от расстояния между элементами тока. Ампер предположил, что

$$dF_{21} \sim \frac{1}{r_{12}^n}, \quad (17.3)$$

и экспериментально определил, что  $n = 2$ .

4. Было установлено, что величина и направление силы  $d\vec{F}_{21}$  зависят от взаимной ориентации элементов тока. Определение этой зависимости оказалось весьма трудным делом и потребовало усилий многих ученых.

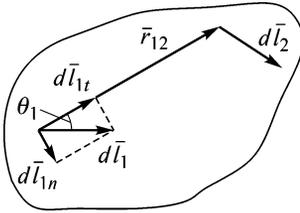


Рис. 17.2

Чтобы установить вид этой зависимости, проведем цепь рассуждений с использованием имеющихся опытных фактов. Для простоты вначале будем считать, что элементы тока лежат в одной плоскости (рис. 17.2).

Разложим вектор  $d\vec{l}_1$  на две компоненты —  $d\vec{l}_{1t}$  и  $d\vec{l}_{1n}$ , сонаправленную и перпендикулярную вектору  $\vec{r}_{12}$  соответственно. Опыт свидетельствует о том, что элемент тока  $I_1 d\vec{l}_{1t}$ , ориентированный вдоль  $\vec{r}_{12}$ , не оказывает никакого действия на элемент тока  $I_2 d\vec{l}_2$ . Следовательно, можно предположить, что

$$dF_{21} \sim dl_{1n} = dl_1 \cdot \sin \theta_1, \quad (17.4)$$

где  $\theta_1$  — угол между векторами  $d\vec{l}_1$  и  $\vec{r}_{12}$  (рис. 17.2).

Если направленные отрезки  $d\vec{l}_1$  и  $d\vec{l}_2$  не лежат в одной плоскости, то вектор  $d\vec{l}_2$  можно разложить на два, один из которых ( $d\vec{l}_{2t}$ ) лежит в плоскости, содержащей  $d\vec{l}_1$  и  $\vec{r}_{12}$ , а второй ( $d\vec{l}_{2n}$ ) перпендикулярен этой плоскости (рис. 17.3).

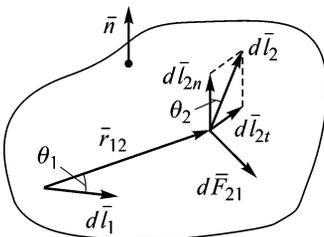


Рис. 17.3

Из опыта известно, что сила, действующая на элемент тока, перпендикулярный рассматриваемой плоскости, равна нулю. Отсюда можно полагать, что

$$dF_{21} \sim dl_{1t} = dl_2 \cdot \sin \theta_2, \quad (17.5)$$

где  $\theta_2$  — угол между вектором  $d\vec{l}_2$  и нормалью  $\vec{n}$  к плоскости, содержащей  $d\vec{l}_1$  и  $\vec{r}_{12}$ .

Объединяя (17.2)–(17.5), получаем

$$dF_{21} \sim \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2}{r_{12}^2}. \quad (17.6)$$

5. Относительно направления силы  $d\vec{F}_{21}$  опыт показывает, что этот вектор перпендикулярен элементу тока  $I_2 d\vec{l}_2$  и лежит в рассматриваемой плоскости, причем векторы  $d\vec{l}_2$ ,  $\vec{n}$  и  $d\vec{F}_{21}$  образуют правую тройку, то есть к этим векторам применимо правило правого винта (буравчика) (рис. 17.4).

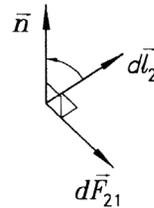


Рис. 17.4

Поворот винта происходит вокруг оси, перпендикулярной  $\vec{n}$  и  $d\vec{l}_2$ , от вектора  $d\vec{l}_2$  к  $\vec{n}$ , направление осевого движения винта совпадает с вектором  $d\vec{F}_{21}$ .

Векторы  $d\vec{l}_1$ ,  $\vec{r}_{12}$  и  $\vec{n}$  также образуют правую тройку, и для определения направления нормали можно использовать правило буравчика (рис. 17.5).

Выражение для вектора  $d\vec{F}_{21}$ , характеризующего силу воздействия элемента тока  $I_1 d\vec{l}_1$  на элемент тока  $I_2 d\vec{l}_2$ , с использованием векторного произведения векторов можно записать компактно (в системе единиц СИ):

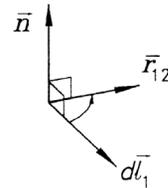


Рис. 17.5

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2 \left[ d\vec{l}_2 \left[ d\vec{l}_1 \vec{r}_{12} \right] \right]}{r_{12}^3}, \quad (17.7)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — размерный коэффициент; Гн (генри) — единица измерения индуктивности, определение которой будет дано в § 21. Соотношение (17.7) носит название *закона Ампера для элементов тока* и в магнетизме играет ту же роль, что и закон Кулона в электростатике.

## 17.2. Магнитное поле. Принцип суперпозиции

При изучении магнитного взаимодействия ставится вопрос о том, что является его носителем; происходят ли какие-либо изменения в пространстве при наличии лишь одного проводника с током. Как мы уже отмечали, современная физика строится на принципе близкодействия, то есть вводится понятие *магнитного поля*. Основное свойство последнего заключается в том, что *на внесенные в него постоянные магниты и проводники с током действует сила*.

Основную характеристику магнитного поля мы введем по аналогии с электростатикой (§ 10). В законе Кулона мы выделили сомножители, связанные с одним точечным зарядом и расстоянием до второго заряда, назвав полученную величину напряженностью электрического поля точечного заряда:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}.$$

Тогда, зная напряженность электростатического поля, можно найти силу, действующую на точечный заряд:  $\vec{F}_{21} = q_2\vec{E}_1$ .

В законе Ампера (17.7) мы тоже выделим часть, связанную с первым элементом тока и расстоянием до второго элемента тока. По смыслу получаемую характеристику следовало бы назвать напряженностью магнитного поля, однако исторически сложилось так, что она называется *индукцией магнитного поля*:

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 \left[ d\vec{l}_1 \vec{r}_{12} \right]}{r_{12}^3} \quad (17.8)$$

(напряженностью магнитного поля назван другой, вспомогательный вектор). Единицей измерения индукции магнитного поля  $B$  в системе СИ является тесла (Тл).

Соотношение (17.8) носит название закона Био–Савара–Лапласа, так как впервые было получено П. Лапласом. Он проанализировал данные других исследователей, Ж. Био и Ф. Савара, и пришел к выводу, что индукцию магнитного поля, создаваемого проводником с током конечных размеров в вакууме, можно находить используя принцип суперпозиции вкладов от отдельных малых участков проводника — элементов тока, на которые он может быть мысленно разбит:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{L_1} \frac{[d\vec{l}_1 \vec{r}_{12}]}{r_{12}^3}, \quad (17.9)$$

где  $L_1$  — контур, проходящий вдоль рассматриваемого проводника с током.

Используя (17.9), можно найти силу, действующую на данный элемент тока ( $I_2 d\vec{l}_2$ ) в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}_1$ :

$$d\vec{F}_{21} = I_2 [d\vec{l}_2 \vec{B}_1]. \quad (17.10)$$

Для проводника конечных размеров (17.10) необходимо проинтегрировать вдоль этого проводника:

$$\vec{F}_{21} = I_2 \int_{L_2} [d\vec{l}_2 \vec{B}_1(\vec{r})]. \quad (17.11)$$

В случае прямого проводника с током, помещенного в однородное магнитное поле, на его участок  $d\vec{l}_2$  действует сила

$$\vec{F}_{21} = I_2 [\vec{l}_2 \vec{B}_1]. \quad (17.12)$$

Выражения (17.10)–(17.12) представляют собой частные случаи *закона Ампера*.

Если проводники помещены в однородную непроводящую изотропную среду, то закон Био–Савара–Лапласа будет иметь вид

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l} \vec{r}]}{r^3},$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость среды, физический смысл которой будет пояснен позже (§ 19).

Для наглядного описания магнитного поля вводятся линии вектора магнитной индукции так же, как это было сделано в разд. 10.5.

Вектор магнитной индукции является силовой характеристикой магнитного поля. Однако если напряженность электростатического поля можно определить по силе, действующей на внесенный в него пробный заряд, то вектор магнитной индукции можно определить по моменту сил, действующему на виток с током в однородном магнитном поле, который рассматривается далее в разд. 19.2.

### 17.3. Примеры расчета индукции магнитного поля

Аналитически рассчитать индукцию магнитного поля от проводников с током конечных размеров можно для небольшого числа конфигураций проводников, обладающих определенной симметрией.

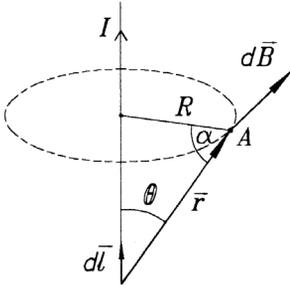


Рис. 17.6

**Пример 1.** *Магнитное поле прямолинейного участка проводника с током.* Требуется найти индукцию магнитного поля в точке  $A$  (рис. 17.6). Выделим в проводнике элемент тока  $I d\vec{l}$ , проведем в интересующую нас точку  $A$  радиус-вектор  $\vec{r}$ . В соответствии с (17.8) вклад от данного элемента тока в индукцию магнитного поля

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \theta}{r^2}. \quad (17.13)$$

Очевидно, что линии вектора  $\vec{B}$  в данном случае являются окружностями, лежащими в плоскостях, перпендикулярных проводу. В соответствии с принципом суперпозиции в точке  $A$

$$\vec{B} = \int d\vec{B}. \quad (17.14)$$

Так как векторы  $d\vec{B}$  от всех элементов тока в точке  $A$  сонаправлены, то модуль вектора  $\vec{B}$  равен

$$B = \int dB. \quad (17.15)$$

Подставим соотношение (17.13) в (17.15). При этом в (17.13) переменные  $dl$ ,  $\theta$ ,  $r$  удобно выразить через какой-либо один параметр, например через угол  $\alpha$  и его дифференциал  $d\alpha$  (рис. 17.6):

$$r = \frac{R}{\cos \alpha}; \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

$$l = R \operatorname{tg} \alpha; \quad dl = \frac{R}{\cos^2 \alpha} d\alpha.$$

С учетом этого (17.13) приобретает вид

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \alpha}{R} d\alpha. \quad (17.16)$$

Если необходимо найти индукцию магнитного поля, создаваемого в точке  $A$  частью проводника, ограниченной углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , то интегрирование (17.16) следует проводить в этих пределах, тогда

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1). \quad (17.17)$$

Для бесконечного провода  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$  и  $\alpha_2 = -\frac{\pi}{2}$ , тогда

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (17.18)$$

**Пример 2.** *Магнитное поле кругового витка с током.* Найдем индукцию магнитного поля на оси  $Ox$ , проходящей через центр витка с током перпендикулярно его плоскости (рис. 17.7).

Опять выделим элемент тока в некотором участке кольца и проведем в интересующую нас точку радиус-вектор  $\vec{r}$ . (Очевидно,  $d\vec{l} \perp \vec{r}$ .) Напомним, что вклад от данного элемента тока в индукцию, то есть вектор  $d\vec{B}$ , будет перпендикулярен векторам  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$  (рис. 17.7).

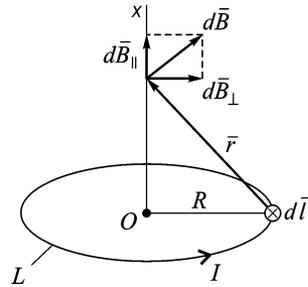


Рис. 17.7

В соответствии с принципом суперпозиции

$$\vec{B} = \int d\vec{B}.$$

Каждый вектор  $d\vec{B}$  удобно представить в виде суммы двух компонент —  $d\vec{B}_{\perp}$  и  $d\vec{B}_{\parallel}$  (рис. 17.7). Тогда

$$\vec{B} = \int d\vec{B}_{\perp} + \int d\vec{B}_{\parallel}. \quad (17.19)$$

Первый интеграл в правой части (17.19) обращается в ноль в силу симметрии задачи. Так как все векторы  $d\vec{B}_{\parallel}$  сонаправлены, то модуль вектора  $\vec{B}$  равен

$$B = \int dB_{\parallel},$$

$$dB_{\parallel} = dB \cdot \sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IR}{\sqrt{(R^2 + x^2)^3}} dl.$$

Производя интегрирование, получаем

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IR}{\sqrt{(R^2 + x^2)^3}} \int dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi R^2 I}{\sqrt{(R^2 + x^2)^3}}. \quad (17.20)$$

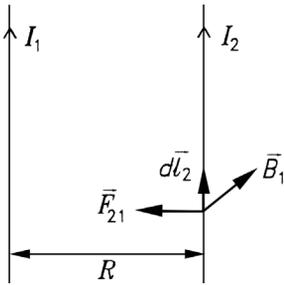


Рис. 17.8

**Пример 3.** Сила взаимодействия двух параллельных проводников с током. Воспользуемся соотношениями (17.12) и (17.18) для расчета силы, действующей между двумя прямыми параллельными проводниками, по которым текут токи  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 17.8). Будем считать, что ток  $I_1$  является источником магнитного поля с индукцией  $B_1$  в точках нахождения второго проводника, определяемой соотношением (17.18):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}.$$

Так как угол между векторами  $\vec{B}_1$  и  $d\vec{l}_2$  прямой и вектор  $\vec{B}_1$  одинаков для всех элементов тока  $I_2 d\vec{l}_2$ , то сила, приложенная ко второму проводнику

$$F_{21} = B_1 I_2 l_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l_2}{2\pi R}.$$

Для сонаправленных токов проводники притягиваются (пример, рассмотренный на рис. 17.8), в противоположном случае проводники отталкиваются.

Пусть токи в проводниках равны, тогда сила  $F_{21}$ , приходящаяся на единицу длины,

$$\frac{F_{21}}{l_2} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi R}. \quad (17.21)$$

Именно это соотношение используется в системе единиц СИ для введения единицы силы тока — ампера: *ампер — сила постоянного тока, который, проходя по двум параллельным проводникам бесконечно малого сечения, расположенным на расстоянии одного метра один от другого в вакууме, вызывает между ними силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины.*

### 17.4. Магнитное поле движущегося заряда

Магнитное поле, возникающее при протекании тока по проводнику, обусловлено движением электрических зарядов. Можно поставить вопрос о нахождении вклада каждого носителя заряда в результирующее значение индукции этого поля. Выделим в проводнике малый объем в форме прямого цилиндра, образующие которого параллельны вектору плотности тока (рис. 17.9).

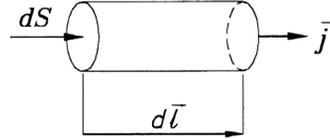


Рис. 17.9

Элемент тока, протекающего через основания рассматриваемого цилиндра

$$I d\vec{l} = \vec{j} dS dl = en\vec{v} dS dl = \vec{v} e d\mathcal{N}, \quad (7.22)$$

где  $\vec{v}$ ,  $e$ ,  $n$  — введенные нами ранее скорость упорядоченного движения, заряд и концентрация носителей тока;  $d\mathcal{N}$  — число носителей тока в выделенном объеме.

Вклад в индукцию магнитного поля, связанный с выделенным элементом тока, можно найти, подставив выражение для элемента тока (17.22) в закон Био–Савара–Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e[\vec{v}\vec{r}]}{r^3} d\mathcal{N}. \quad (17.23)$$

Поделив (17.23) на  $d\mathcal{N}$ , мы определим вклад в вектор  $\vec{B}$ , обусловленный движением одного заряда. Так как магнитное поле может индуцироваться движением частицы, несущей произвольное число элементарных зарядов, то символ  $e$  в (17.23) мы заменим на  $q$  — полный заряд частицы — и получим в итоге

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q[\vec{v}\vec{r}]}{r^3}. \quad (17.24)$$

В каждый момент времени линии магнитного поля будут иметь форму окружностей, лежащих в плоскостях, перпендикулярных вектору скорости частицы  $\vec{v}$ , с центрами на оси, проходящей через вектор  $\vec{v}$  (рис. 17.10).

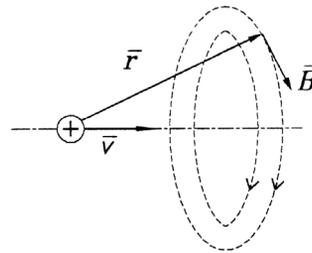


Рис. 17.10

### 17.5. Сила Лоренца

Сила Ампера, действующая на элемент тока  $Id\vec{l}$  (17.10), есть результирующая сил, приложенных к каждому носителю тока. Как и ранее, заменим выражение для элемента тока в (17.10) в соответствии с (17.22):

$$d\vec{F} = e[\vec{v}\vec{B}]d\mathcal{M}. \quad (17.25)$$

Отсюда сила, действующая на движущуюся заряженную частицу со стороны магнитного поля (*сила Лоренца*)

$$\vec{F} = q[\vec{v}\vec{B}], \quad (17.26)$$

причем мы предположили, что частица может нести произвольный заряд  $q$ .

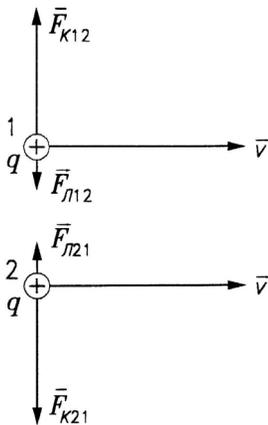


Рис. 17.11

Используя полученные соотношения (17.24) и (17.26), можно сравнить величины кулоновских и магнитных сил для двух частиц, движущихся по параллельным прямым (рис. 17.11).

Если скорости частиц  $v \ll c$ , то электрическое взаимодействие зарядов будет аналогично статическому:

$$F_{к21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r_{12}^2}.$$

Пусть первая частица является источником магнитного поля с индукцией

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{qV}{r_{12}^2}.$$

На вторую частицу действует сила Лоренца

$$F_{л21} = qvB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q^2v^2}{r_{12}^2}.$$

Отсюда отношение

$$\frac{F_{л21}}{F_{к21}} = v^2\mu_0\epsilon_0 = \frac{v^2}{c^2}, \quad (17.27)$$

где произведение коэффициентов

$$\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2.$$

В следующем курсе будет показано, что  $c$  — скорость распространения электромагнитной волны.

Из полученного отношения (17.27) видно, что при  $v \ll c$  магнитные силы, действующие между отдельными движущимися заряженными частицами, весьма слабы по сравнению с кулоновскими. Мы фиксируем в опытах магнитное взаимодействие проводников с током только потому, что они электронейтральны и электрическое взаимодействие между ними отсутствует.

## § 18. ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

### 18.1. Интегральные теоремы электростатики и магнитостатики

Напомним, что ранее (§ 11, 12) мы установили значения потока вектора напряженности электростатического поля через замкнутую поверхность

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0} \quad (18.1)$$

и циркуляции вектора  $\vec{E}$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (18.2)$$

Эти соотношения представляют собой математическую форму теорем, отражающих следующие два фундаментальных свойства электростатического поля.

1. Электростатическое поле может быть создано только зарядами.

2. Электростатическое поле является потенциальным. Линии такого поля всегда незамкнуты.

Из примеров расчета индукции магнитных полей проводников различной формы (разд. 17.3) видно, что линии вектора  $\vec{B}$  замкнуты. Такими линиями обладают так называемые *вихревые поля*. Очевидно, что *поток вектора магнитной индукции через*

замкнутую поверхность всегда равен нулю, ибо любая линия  $\vec{B}$  пересекает эту поверхность четное число раз:

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (18.3)$$

Равенство (18.3) является аналитической записью теоремы Гаусса для магнитного поля и представляет собой прямое следствие отсутствия в природе магнитных зарядов.

Пусть магнитное поле обусловлено протеканием постоянных токов. При этом вектор  $\vec{B}$  постоянен во времени, то есть реализуется случай магнитостатики. Контурный интеграл вида (18.2) для  $\vec{B}$  может быть отличен от нуля и определяется следующей теоремой: *циркуляция вектора индукции магнитного поля в вакууме по любому замкнутому контуру пропорциональна алгебраической сумме токов, проходящих через поверхность, ограниченную этим контуром.* Коэффициент пропорциональности в системе СИ равен  $\mu_0$ :

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i. \quad (18.4)$$

Из формулы (18.4) видно, что для магнитного поля невозможно ввести скалярный потенциал, однозначно связанный с вектором  $\vec{B}$ .

Для определения знака силы тока в правой части (18.4) необходимо задать направление обхода контура, связать с ним в соответствии с правилом правого винта положительное направление нормали к поверхности и выяснить направления токов по отношению к нормали (рис. 18.1).

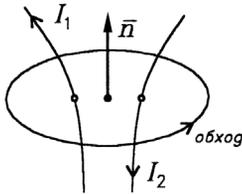


Рис. 18.1

Для примера, приведенного на рис. 18.1, соотношение (18.4) имеет вид

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2).$$

Очевидно, если поверхность, ограниченную данным контуром, не пересекает ни один ток, то циркуляция  $\vec{B}$  равна нулю. При наличии  $N^*$  витков в контуре сложной формы, охватывающем данный ток  $I$ , циркуляция  $\vec{B}$  равна  $\mu_0 N^* I$ .

### 18.2. Доказательство теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции

Как и при рассмотрении теоремы Гаусса (§ 11), начнем доказательство с частного случая и последовательно будем снимать введенные ограничения.

Пусть магнитное поле создается прямолинейным проводником с током, а в качестве контура интегрирования выбрана линия вектора магнитной индукции (рис. 18.2). Тогда интеграл по контуру

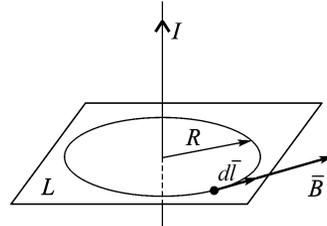


Рис. 18.2

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B dl, \quad (18.5)$$

так как векторы  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  сонаправлены. Подставим в (18.5) полученное ранее выражение для магнитной индукции прямолинейного проводника с током (17.18):

$$\oint_L B dl = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \oint_L dl = \mu_0 I.$$

Таким образом, для рассматриваемого частного случая теорема доказана.

Откажемся от условия, что контур интегрирования является окружностью, но будем считать, что он лежит в плоскости, перпендикулярной проводнику. На рис. 18.3 приведен вид сверху на фрагмент такого контура (ток перпендикулярен плоскости чертежа).

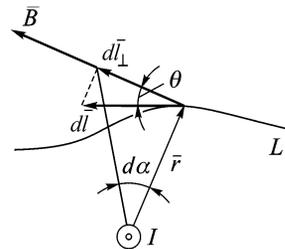


Рис. 18.3

Для этого случая

$$\vec{B} d\vec{l} = B dl \cos \theta = \pm B dl_{\perp} = \pm \frac{\mu_0 I dl_{\perp}}{2\pi r}, \quad (18.6)$$

где  $dl_{\perp}$  — проекция вектора  $d\vec{l}$  на направление вектора  $\vec{B}$ .

Знаки  $\pm$  в (18.6) связаны со знаком  $\cos \theta$ . Для острого угла  $\theta$  выбираем знак «+», для тупого угла  $\theta$  — знак «-». В (18.6) отношение  $dl_{\perp}/r$  вследствие малости  $dl_{\perp}$  равно радианной мере угла  $d\alpha$  (рис. 18.3). Под  $d\alpha$  будем подразумевать алгебраическую величину, знак которой определяется из (18.6). Тогда

$$\vec{B}d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha,$$

то есть из соотношения (18.6) исчезла специфика формы контура интегрирования. С учетом этого циркуляция  $\vec{B}$

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\alpha.$$

Очевидно, для любого плоского замкнутого контура

$$\oint d\alpha = 2\pi.$$

Отсюда

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I.$$

Далее снимем ограничение на плоскую форму контура. На рис. 18.4 изображен вид сбоку на часть контура, обращенную

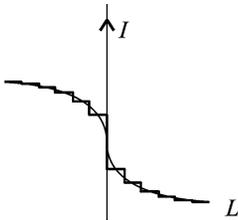


Рис. 18.4

к зрителю. Эту кривую можно всегда представить ступенчатой линией со сколь угодно мелкими ступеньками (рис. 18.4). На вертикальных участках ступеней  $\vec{B} \perp d\vec{l}$  и  $\vec{B}d\vec{l} = 0$ . Поэтому циркуляция вектора  $\vec{B}$  не изменится, если контур интегрирования спроецировать на плоскость, перпендикулярную току, то есть задача сводится к предыдущему случаю.

Доказанная независимость циркуляции  $\vec{B}$  от формы контура, очевидно, свидетельствует и о независимости интеграла (18.4) от формы проводника с током. Если мы учтем, что при наличии нескольких проводников с током в вакууме индукцию результирующего магнитного поля можно находить в соответствии с принципом суперпозиции и что последовательность операций интегрирования в (18.4) и суммирования можно менять местами, то, по существу, снимем все введенные в начале доказательства ограничения.

Если все пространство, где есть магнитное поле, заполнено однородным и изотропным веществом с магнитной проницаемостью  $\mu$ , то уравнение (18.4) следует записать в виде

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum_{i=1}^M I_i. \quad (18.7)$$

### 18.3. Применение теоремы о циркуляции для расчета индукции магнитного поля

По отношению к использованию формулы (18.4) для вычисления вектора  $\vec{B}$  можно сделать те же замечания, что и в соответствующем разделе (разд. 11.3) для теоремы Гаусса. Теорема о циркуляции — скалярное соотношение, и в общем случае ее недостаточно для нахождения трех проекций вектора  $\vec{B}$ . Однако в задачах с определенной симметрией, когда можно установить направление вектора  $\vec{B}$  во всех точках пространства, при правильном выборе контура интегрирования теорема о циркуляции позволяет рассчитать модуль вектора  $\vec{B}$ .

В качестве примера рассмотрим длинную катушку, навитую на цилиндрический каркас. Внутри каркаса может быть помещен магнитный сердечник. Пусть общая длина катушки равна  $l$ , а число витков —  $M$ . Такая катушка называется соленоидом и представляет собой систему рассмотренных выше круговых витков с током. Из соображений симметрии внутри соленоида вдали от его концов линии  $\vec{B}$  будут направлены по оси и поле будет однородным (рис. 18.5).

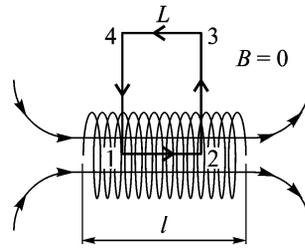


Рис. 18.5

Контур интегрирования всегда выбирается так, чтобы он целиком или в отдельных частях совпадал с линией поля. Во всех остальных частях произведение  $\vec{B}d\vec{l}$  должно быть равно нулю. Этому условию для данной задачи удовлетворяет контур в форме прямоугольника, изображенный на рис. 18.5. Найдем циркуляцию  $\vec{B}$  по этому контуру:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B}d\vec{l} + \int_2^3 \vec{B}d\vec{l} + \int_3^4 \vec{B}d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B}d\vec{l}. \quad (18.8)$$

Из суммы в правой части (18.8) только первый интеграл отличен от нуля:

$$\int_1^2 \vec{B}d\vec{l} = \int_1^2 Bdl,$$

так как векторы  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  на участке  $1 \rightarrow 2$  сонаправлены. Второе и четвертое слагаемые равны нулю, так как на любом участке сторон контура  $2 \rightarrow 3$  и  $4 \rightarrow 1$  векторы  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  взаимно перпендикулярны. Участок  $3 \rightarrow 4$  может быть выбран на любом расстоянии от оси соленоида, в частности на очень большом, где магнитное поле пренебрежимо мало.

Далее

$$\int_1^2 B dl = B \int_1^2 dl,$$

так как поле внутри соленоида однородно.

В итоге

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B l_{12} = \mu \mu_0 \frac{\mathcal{N}}{l} l_{12} I.$$

Отсюда

$$B = \mu \mu_0 \frac{\mathcal{N}}{l} I = \mu \mu_0 n I, \quad (18.9)$$

где  $n$  — число витков, приходящееся на единицу длины соленоида. Практически, если длина соленоида значительно больше, чем его диаметр, выражение (18.9) будет справедливо для точек в средней части соленоида.

## § 19. МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ

Рассмотрим плоский виток проводника с током — рис. 19.1. Указанный проводник называют *магнитным диполем*. Поле, создаваемое таким диполем, его поведение во внешнем магнитном поле определяется его *магнитным дипольным моментом*, который представляет собой вектор, направленный вдоль нормали к витку с током и равный по величине произведению силы тока на площадь поверхности, ограниченной витком.

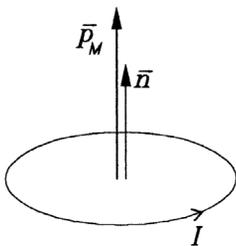


Рис. 19.1

$$\vec{p}_M = IS\vec{n}. \quad (19.1)$$

Нормаль и направление тока в проводнике связаны правилом правого винта. Единицей измерения магнитного момента  $p_M$  в системе СИ является  $\text{А} \cdot \text{м}^2$ .

Понятие магнитного диполя является основой для рассмотрения магнитных явлений в веществе. Орбитальное движение электронов в атоме, спиновое движение заряженных микрочастиц можно представить как кольцевые токи и, следовательно, анализировать поведение атомов вещества в магнитном поле, изучая взаимодействие магнитных микродиполей с указанным полем.

### 19.1. Поле магнитного диполя

В этом разделе мы изучим лишь частный случай — магнитную индукцию, создаваемую кольцевым витком с током на оси, проведенной через его центр перпендикулярно плоскости кольца. Для этого воспользуемся результатами расчета из разд. 17.3 — формулой (17.20):

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I\pi R^2}{\sqrt{(R^2 + x^2)^3}}.$$

Легко видеть, что вектор  $\vec{B}$  для рассматриваемого случая можно выразить через магнитный дипольный момент витка с током:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\vec{p}_M}{\sqrt{(R^2 + x^2)^3}}.$$

Магнитный диполь называют *точечным*, если его размеры значительно меньше расстояния до точки наблюдения, то есть когда  $R \ll x$ . При этом индукция магнитного поля, создаваемого диполем на оси,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\vec{p}_M}{x^3}, \quad (19.2)$$

где вектор  $\vec{B}$  уже не зависит от формы витка с током.

Напомним, что напряженность поля точечного электрического диполя на его оси определялась сходным соотношением

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\vec{p}_E}{x^3}.$$

### 19.2. Магнитный диполь во внешнем поле

Как и в случае электрического диполя, рассмотрим две ситуации.

1. Однородное магнитное поле.

Каков бы ни был по форме виток с током, суммарная сила, действующая на него в однородном поле, равна нулю. Действительно, в соответствии с законом Ампера (формула (17.11))

$$\vec{F} = I \oint_L [d\vec{l} \vec{B}] = I \left[ \left( \oint_L d\vec{l} \right) \vec{B} \right] = 0,$$

так как интеграл  $\oint_L d\vec{l}$  представляет собой сумму векторов  $d\vec{l}$ , образующих замкнутую линию.

Однако момент сил, приложенных к магнитному диполю во

внешнем поле, может быть отличен от нуля. Для упрощения расчета будем считать, что ток течет по прямоугольной рамке (рис. 19.2, *a*, *б*), и сторона *a* перпендикулярна линиям вектора магнитной индукции.

Силы, приложенные к сторонам *b* ( $\vec{F}_3$  и  $\vec{F}_4$ ), лишь деформируют рамку, не создавая механического момента. Силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  равны по величине и противоположно направлены, то есть образуют пару сил. Модули этих сил равны:

$$F_1 = F_2 = BaI.$$

Плечо пары сил относительно любой оси, перпендикулярной плоскости рис. 19.2, *б*, равно  $b \sin \alpha$ , и момент сил относительно этой оси

$$N_z = F_1 b \sin \alpha = abIB \sin \alpha = p_M B \sin \alpha. \quad (19.3)$$

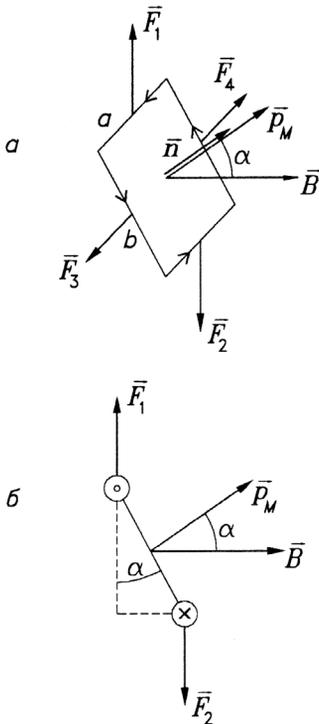


Рис. 19.2

Таким образом, момент сил, действующий на плоский контур в однородном магнитном поле, равен

$$\vec{N} = [\vec{p}_M \vec{B}]. \quad (19.4)$$

Проводя расчет, полностью аналогичный случаю электрического диполя (§ 13), можно определить потенциальную энергию магнитного диполя во внешнем поле:

$$U_M = -(\vec{p}_M \vec{B}) = -p_M B \cos \alpha. \quad (19.5)$$

Хотя мы для простоты расчета выбрали простейшую модель прямоугольной рамки, легко видеть, что результат остается справедливым для замкнутого тока любой формы. Действительно, такой ток можно представить совокупностью прямоугольных рамок, по смежным сторонам которых текут равные и противоположно направленные токи (рис. 19.3).

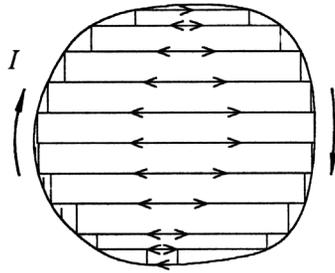


Рис. 19.3

Суммарный механический момент, действующий со стороны магнитного поля на такой проводник, складывается из моментов, действующих на все малые прямоугольные рамки. А для прямоугольного тока расчет ведется по формуле (19.4).

2. Неоднородное магнитное поле.

В соответствии с формулой (6.16) сила, приложенная к магнитному диполю, может быть вычислена через потенциальную энергию:

$$\vec{F} = -\text{grad} U_M = +\text{grad}(\vec{p}_M \vec{B}) = \text{grad}(p_M B \cos \alpha). \quad (19.6)$$

В частности, для поля, обладающего симметрией относительно оси  $x$ ,

$$F_x = p_M \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha. \quad (19.7)$$

Если дипольный момент ориентирован по вектору  $\vec{B}$ , то он втягивается в область более сильного поля (рис. 19.4).

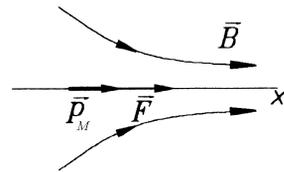


Рис. 19.4.

### 19.3. Магнитное поле в веществе

В веществе магнитное поле возбуждается не только электрическими токами, текущими по проводам, но и *движением заряженных частиц внутри самих атомов и молекул вещества*, то есть уже упоминавшимися магнитными микродиполями.

По современным представлениям магнетизм вещества обусловлен тремя причинами — орбитальным движением электронов вокруг своих ядер, собственным вращением или спином электронов и собственным вращением или спином ядер. Тяжелые ядра движутся медленнее электронов, и их магнитные моменты в тысячи раз меньше орбитальных и спиновых моментов электронов.

В отсутствие внешнего поля микроскопические магнитные диполи ориентированы, как правило, хаотично, и их поля компенсируют друг друга. При наложении внешнего поля моменты атомов полностью или частично ориентируются, и говорят, что вещество *намагничено*. Вещества, способные намагничиваться, называют *магнетиками*.

Так же как и при анализе электрического поля в веществе, для магнитной индукции можно ввести понятие микроскопического поля, которое складывается из полей макроскопических токов, текущих по проводам, и микротоков:

$$\vec{B}_{\text{микро}} = \vec{B}_{\text{ток}} + \vec{B}_{\text{м/ч}}. \quad (19.8)$$

Поля, обусловленные движением заряда в микрочастицах;  $\vec{B}_{\text{м/ч}}$ , изменяются в значительных пределах на межатомных расстояниях и не могут быть точно заданы. Поэтому зачастую оказывается достаточным рассмотрение макроскопической электродинамики. Выражение (19.8) усредняется по физически малому объему (см. разд. 14.1):

$$\vec{B}_{\text{макро}} = \langle \vec{B}_{\text{микро}} \rangle = \langle \vec{B}_{\text{ток}} \rangle + \langle \vec{B}_{\text{м/ч}} \rangle = \vec{B}_0 + \vec{B}', \quad (19.9)$$

где  $\vec{B}_0$  — внешнее поле, созданное проводниками с током;  $\vec{B}'$  — среднее внутреннее поле в веществе, обусловленное микродиполями.

Опыт показывает, что во многих практически важных случаях, в частности для однородных и изотропных магнитных сред в слабых магнитных полях, магнитная индукция макроскопиче-

ского поля прямо пропорциональна магнитной индукции внешнего поля:

$$\vec{B}_{\text{макро}} = \mu \vec{B}_0, \quad (19.10)$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость вещества, введенная нами формально в § 17.

По поведению в магнитном поле вещества делятся на три класса.

1. Диамагнетики, у которых  $\mu \leq 1$ , и внешнее поле слегка ослабляется в них.

2. Парамагнетики, для которых  $\mu \geq 1$ , и внешнее поле в них слегка усиливается.

3. Ферромагнетики, в которых  $\mu = 100 - 100\,000$ . Магнитное поле в них существенно усиливается, причем после удаления внешнего поля  $\vec{B}_0$  внутреннее поле  $\vec{B}'$  может сохраняться, то есть существует *остаточная намагниченность*. Важно отметить, что магнитная проницаемость ферромагнетиков не является постоянной и зависит от индукции внешнего поля.

## § 20. ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ ФАРАДЕЯ

Мы установили, что электрические токи создают в прилегающем к ним пространстве магнитное поле. После открытия этого эффекта у исследователей, естественно, возник вопрос об обратном явлении: может ли магнитное поле вызвать появление тока в проводнике? Эта проблема, очевидно, имела и большое практическое значение в связи с поиском новых принципов получения электрической энергии. Существенный вклад в понимание указанного явления внес английский ученый М. Фарадей. На основе проведенного им цикла экспериментов он в 1831 г. сформулировал *закон электромагнитной индукции*, указывающий, при каких условиях магнитное поле порождает электрический ток в проводниках. На мысль о существовании явления электромагнитной индукции Фарадея натолкнула аналогия с электростатикой, согласно которой заряды приводят к перераспределению заряда в телах (явление электростатической индукции). Ниже мы кратко опишем серию опытов, явившихся основой для открытия рассматриваемого явления.

### 20.1. Опыты Фарадея

Для повышения чувствительности своих экспериментов Фарадей при регистрации индукционных токов применял длинный проводник, навитый на каркас, то есть катушку. К концам этой измерительной катушки подключался гальванометр. В качестве источника магнитного поля были использованы постоянный магнит либо другая катушка, по которой пропускался электрический ток (электромагнит).

1. Если измерительная катушка находилась в поле неподвижных постоянного или электромагнита, то гальванометр фиксировал отсутствие индукционного тока. Отсюда был сделан вывод, что *постоянное магнитное поле любой величины не вызывает появления электрического тока в неподвижном проводнике.*

2. При взаимных перемещениях измерительной катушки и магнитов гальванометр показывал наличие индукционного тока. Ток возникал и при изменении силы тока в электромагните. На основе этих опытов был сделан вывод, что *электрический ток в замкнутом проводнике индуцируется при любом изменении магнитного поля, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром.*

3. Дополнительные эксперименты позволили количественно связать силу индукционного тока  $I_{\text{инд}}$  с изменением магнитной индукции. Оказалось, что *величина  $I_{\text{инд}}$  пропорциональна первой производной модуля вектора  $\vec{B}$  по времени:*

$$I_{\text{инд}} \sim \frac{dB}{dt}. \quad (20.1)$$

4. Далее выяснилось, что в появлении индукционного тока играет роль не столько скорость изменения магнитной индукции, сколько скорость изменения числа линий вектора  $\vec{B}$ , пересекающих поверхность, ограниченную измерительным контуром, то есть *скорость изменения магнитного потока  $\Phi_B$ :*

$$I_{\text{инд}} \sim \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (20.2)$$

Единицей измерения магнитного потока  $\Phi_B$  в системе СИ является вебер (1 Вб = 1 Тл · 1 м<sup>2</sup>).

Отдельного обсуждения требует вопрос о направлении индукционного тока.

## 20.2. Правило Ленца. Закон электромагнитной индукции

Рассмотрим простой пример. Пусть прямой проводник  $KL$  движется со скоростью  $\vec{V}$  в однородном магнитном поле  $\vec{B}$  (рис. 20.1). Для регистрации индукционного тока создадим замкнутый контур, включающий проводник  $KL$  и неподвижные параллельные проводники, замкнутые на перемычку  $MN$ .

Вектор  $\vec{V}$  лежит в плоскости, включающей все проводники, вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен этой плоскости.

Проводник  $KL$  содержит заряженные частицы, на которые будет действовать сила Лоренца, смещая подвижные из них вдоль проводника (рис. 20.1). Это в свою очередь обуславливает возникновение ЭДС, а следовательно, и индукционного тока в контуре. В данном случае сила Лоренца выступает как сторонняя.

Индукционный ток является источником дополнительного магнитного поля с индукцией  $\vec{B}_{\text{инд}}$ . Направление вектора  $\vec{B}_{\text{инд}}$  связано с направлением тока в контуре правилом правого винта, то есть в нашем случае индукционное поле ориентировано против внешнего поля  $\vec{B}$  (рис. 20.1).

Вследствие протекания тока по проводнику  $KL$  на него со стороны магнитного поля (теперь уже суммарного:  $\vec{B} + \vec{B}_{\text{инд}}$ ) действует сила Ампера  $\vec{F}_A$ . Индукционное поле всегда меньше внешнего, и указанная сила  $\vec{F}_A$  направлена против вектора скорости проводника, тем самым препятствуя его движению.

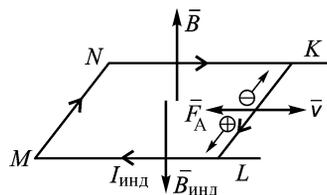


Рис. 20.1

Представим себе процессы, происходящие в рассматриваемом примере, с точки зрения закона электромагнитной индукции. Магнитный поток через поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $KLMN$ ,  $\Phi_B = BS$ , растет со временем, что и является причиной индукционного тока. Магнитное поле этого тока препятствует росту потока  $\Phi_B$ . При изменении направления движения перемычки  $KL$  на противоположное сила Ампера и вектор  $\vec{B}_{\text{инд}}$  будут иметь обратное направление и, следовательно, опять препятствовать движению проводника и изменению величины  $\Phi_B$  соответственно. Эта закономерность впервые была обнаружена русским ученым Э.Х. Ленцем и называется *правилом Ленца*. Суть его можно сформулировать следующим образом: ин-

дукционный ток во всех случаях направлен так, что его действие противоположно действию причины, вызвавшей этот ток.

Как мы уже отмечали, возникновение индукционного тока в замкнутом проводящем контуре обусловлено появлением ЭДС — ЭДС электромагнитной индукции, — и закон Фарадея с учетом правила Ленца в системе единиц СИ аналитически можно записать следующим образом:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (20.3)$$

Таким образом, при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную замкнутым проводящим контуром, в нем возникает ЭДС электромагнитной индукции, пропорциональная скорости изменения магнитного потока со временем.

Знак минус в правой части (20.3) отражает правило Ленца и согласуется с правилом выбора знака ЭДС (разд. 16.4) и магнитного потока (разд. 20.1). Таким образом, закон электромагнитной индукции Фарадея (20.3) позволяет

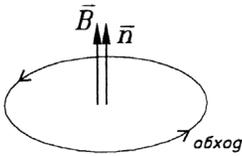


Рис. 20.2

найти не только величины ЭДС и индукционного тока (очевидно,  $I_{\text{инд}} = \mathcal{E}_{\text{инд}}/R$ , где  $R$  — сопротивление контура), но и их направления. Покажем это на примере (рис. 20.2). Произвольно выберем направление обхода контура (против часовой стрелки). Используем правило правого

винта для нахождения положительного направления нормали к поверхности, ограниченной этим контуром (рис. 20.2). Это позволит определить знак магнитного потока  $\Phi_B > 0$ . Пусть

магнитное поле растет, следовательно,  $\frac{d\Phi_B}{dt} > 0$  и  $\mathcal{E}_{\text{инд}} < 0$ . Последнее означает, что индукционный ток течет против выбранного направления контура.

### 20.3. Работа, совершаемая при перемещении проводника с током в магнитном поле

Рассмотрим перемещение прямого проводника с током  $I$  в однородном магнитном поле  $\vec{B}$ . Для простоты будем считать, что проводник может двигаться в плоскости, заданной двумя параллельными проводящими направляющими, к которым под-

ключен источник тока. Положительное направление нормали к этой плоскости свяжем с протекающим током правилом правого винта (рис. 20.3).

Пусть вектор  $\vec{B}$  лежит в плоскости, перпендикулярной направляющим. Тогда на перемычку действует сила Ампера

$$F_A = IBl \sin \theta = IBl \cos \alpha, \quad (20.4)$$

где  $l$  — длина проводника  $KL$ .

При малом перемещении проводника совершаемая элементарная работа

$$dA = F_A dx = IBl dx \cos \alpha. \quad (20.5)$$

Очевидно:

$$Bl dx \cos \alpha = B \cos \alpha dS = d\Phi_B. \quad (20.6)$$

Отсюда

$$dA = Id\Phi_B.$$

Если совершено конечное перемещение, то полная работа

$$A_{12} = \int_1^2 Id\Phi_B. \quad (20.7)$$

Это общее соотношение выполняется всегда; введенные упрощения лишь облегчили вывод формулы. Будем рассматривать частный случай, когда при изменении размеров контура сила тока в нем будет оставаться постоянной, тогда

$$A_{12} = I(\Phi_{B2} - \Phi_{B1}). \quad (20.8)$$

Работа, совершаемая силой Ампера над контуром с постоянным током, равна произведению силы тока на приращение магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром.

Приведенное утверждение на первый взгляд представляется противоречивым. Действительно, сила Ампера, приложенная к проводнику с током, есть равнодействующая сил Лоренца, действующих на каждую заряженную частицу внутри проводника. Работа этих сил, как уже не раз отмечалось, всегда равна нулю. Почему же результирующая работа силы Ампера отлична от нуля?

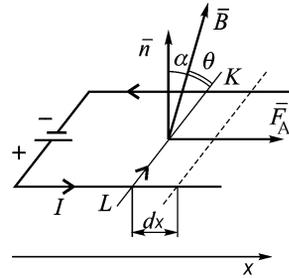


Рис. 20.3

Оказывается, рассматриваемая работа совершается не за счет изменения энергии магнитного поля, а *источником*, поддерживающим протекание постоянного тока по цепи. Противоречие исчезает, если учесть, что в результате движения перемычки происходит изменение площади поверхности, ограничиваемой контуром, и соответствующее изменение магнитного потока. Значит, в контуре индуцируется ЭДС индукции, определяемая соотношением (20.3). Работа источника тока по преодолению этой ЭДС

$$dA_{\text{ист}} = -\mathcal{E}_{\text{инд}} Idt = \frac{d\Phi_B}{dt} Idt = Id\Phi_B. \quad (20.9)$$

При конечном изменении магнитного потока

$$A_{12\text{ист}} = \int_1^2 Id\Phi_B,$$

что полностью совпадает с выражением для работы силы Ампера (20.7).

## § 21. ВЗАИМНАЯ ИНДУКЦИЯ. САМОИНДУКЦИЯ

### 21.1. Взаимная индукция

Пусть в пространстве на определенном расстоянии друг от друга расположены два замкнутых контура 1 и 2 из проводящего материала (рис. 21.1). Если первый контур подключить к источнику тока, то вокруг него возникнет магнитное поле с индукцией  $\vec{B}_1$ . Если вблизи контуров отсутствуют ферромагне-

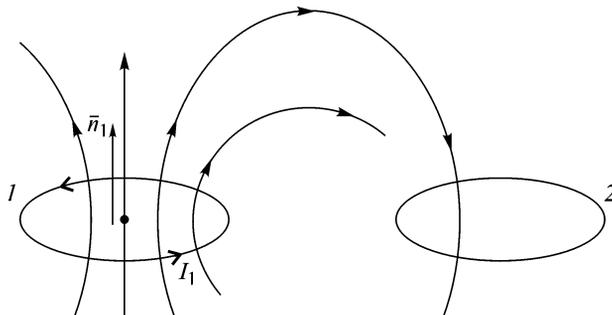


Рис. 21.1

тики, то магнитная индукция поля контура пропорциональна силе тока  $I_1$  в этом контуре:

$$\vec{B}_1 \sim I_1.$$

Поток вектора  $\vec{B}_1$  через поверхность  $\Sigma_2$ , ограниченную вторым контуром, также будет пропорционален  $I_1$ :

$$\Phi_{B_{21}} = \int_{\Sigma_2} \vec{B}_1 d\vec{S}_2 = L_{21}I_1, \quad (21.1)$$

где  $L_{21}$  — коэффициент пропорциональности, который зависит только от формы и взаимного расположения контуров 1 и 2 и магнитных свойств окружающей их среды. Величина  $L_{21}$  называется коэффициентом взаимной индукции или взаимной индуктивностью. Единицей измерения коэффициента взаимной индукции  $L_{21}$  в системе СИ является генри (1 Гн = 1 Вб/1 А).

Аналогично если подключить к источнику тока контур 2 и находить поток магнитной индукции поля, создаваемого током  $I_2$ , через поверхность  $\Sigma_1$ , ограниченную контуром 1, то

$$\Phi_{B_{12}} = \int_{\Sigma_1} \vec{B}_2 d\vec{S}_1 = L_{12}I_2. \quad (21.2)$$

В качестве примера вычислим коэффициент взаимной индукции двух concentрических витков с током радиусов  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 21.2).

Пусть ток идет по большему кольцу. Индукция магнитного поля в центре кольца в соответствии с (17.20) равна

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}.$$

При выполнении условия  $R_1 \gg R_2$  поле в пределах малого кольца можно считать однородным, и магнитный поток

$$\Phi_{B_{21}} = B_1 S_2 = B_1 \pi R_2^2 = \frac{\mu_0 I_1 \pi R_2^2}{2R_1}.$$

Отсюда

$$L_{21} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}.$$

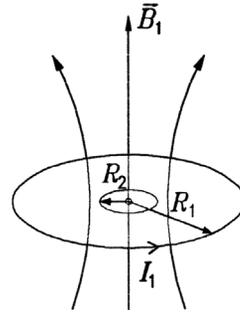


Рис. 21.2

Если контуры  $1$  и  $2$  состоят из  $\mathcal{N}_1$  и  $\mathcal{N}_2$  витков соответственно, то

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1 \mathcal{N}_1}{2R_1}; \Phi_{B21} = B_1 S_2 \mathcal{N}_2 \text{ и } L_{21} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2.$$

Проанализируем систему из двух контуров с точки зрения закона электромагнитной индукции. Пусть ток протекает по первому контуру, тогда изменение магнитного потока через поверхность  $\Sigma_2$ , а следовательно, и наводимая во втором контуре ЭДС в общем случае равны

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{d\Phi_{B21}}{dt} = -\left( L_{21} \frac{dI_1}{dt} + I_1 \frac{dL_{21}}{dt} \right). \quad (21.3)$$

Первое слагаемое в правой части (21.3) обусловлено изменением со временем силы тока  $I_1$ . Этот компонент ЭДС будет превалировать в системе из двух неподвижных относительно друг друга контуров, окруженных средой, в которой магнитная проницаемость  $\mu$  не зависит от индукции, то есть когда  $L_{21}$  остается неизменной.

ЭДС в контуре  $2$  может возникать и при постоянном значении  $I_1$ , но в результате изменения взаимной индуктивности  $L_{21}$ . Эта ситуация реализуется при взаимном перемещении контуров  $1$  и  $2$  или при внесении магнетика в область расположения этих контуров.

## 21.2. Теорема взаимности

Из общих соображений можно предположить, что коэффициенты взаимной индукции  $L_{12}$  и  $L_{21}$  связаны друг с другом. Действительно, можно показать, что в отсутствие вблизи контуров  $1$  и  $2$  ферромагнетиков указанные величины равны друг другу. Это утверждение носит название *теоремы взаимности*. Мы докажем теорему для простейшего частного случая, когда оба контура являются катушками, навитыми на один длинный цилиндрический сердечник, то есть представляют собой систему из двух соленоидов, навитых друг на друга. Пусть  $S$ ,  $l$ ,  $\mathcal{N}_1$  и  $\mathcal{N}_2$  — сечение, длина и числа витков катушек. Вначале предположим, что ток  $I_1$  идет по первому контуру, и найдем поток вектора  $B_1$  через второй контур. Ранее (18.9) было показано, что магнитная индукция поля внутри длинного соленоида равна

$$B_1 = \mu\mu_0 \frac{\mathcal{N}_1}{l} I_1.$$

Следовательно, полный поток магнитной индукции поля первого соленоида через поверхность, ограниченную вторым, равен

$$\Phi_{B21} = B_1 S \mathcal{N}_2 = \mu\mu_0 \frac{\mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2}{l} S I_1 = L_{21} I_1.$$

Если контуры поменять местами, то

$$\Phi_{B12} = \mu\mu_0 \frac{\mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2}{l} S I_2 = L_{12} I_2.$$

Отсюда очевидно, что  $L_{12} = L_{21}$ .

### 21.3. Самоиндукция

Можно рассмотреть случай, когда существует только один контур  $\Sigma_1$ , и магнитное поле создано током  $I_1$ , текущим именно по этому контуру. Как и ранее, считаем, что вблизи контура отсутствуют ферромагнетики. Рассуждая аналогично (разд. 21.1), легко представить, что вектор магнитной индукции указанного поля  $\vec{B}_1$  во всех точках пространства, а следовательно, и поток этого вектора через поверхность  $\Sigma_1$ , ограниченную контуром,  $\Phi_{B11}$ , будут пропорциональны силе тока  $I_1$ :

$$\Phi_{B11} = \int_{\Sigma_1} \vec{B}_1 d\vec{S}_1 = L_{11} I_1. \quad (21.4)$$

При наличии двух контуров общие потоки через ограниченные ими поверхности

$$\begin{aligned} \Phi_{B1} &= \Phi_{B11} + \Phi_{B12} = L_{11} I_1 + L_{12} I_2, \\ \Phi_{B2} &= \Phi_{B21} + \Phi_{B22} = L_{21} I_1 + L_{22} I_2. \end{aligned} \quad (21.5)$$

Величины  $L_{11}$  и  $L_{22}$  называют *коэффициентами самоиндукции* или *индуктивностями* контуров. Для соленоида длиной  $l$ , сечением  $S$  и числом витков  $\mathcal{N}$

$$L_{11} = \mu\mu_0 \frac{\mathcal{N}^2}{l} S = \mu\mu_0 n^2 V, \quad (21.6)$$

где  $n = \mathcal{N}/l$ ,  $V$  — объем соленоида.

Изменение магнитного потока в контуре обуславливает появление ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_{11} = -\frac{d\Phi_{B11}}{dt} = -\left(L_{11}\frac{dI_1}{dt} + I_1\frac{dL_{11}}{dt}\right). \quad (21.7)$$

При постоянной величине  $L_{11}$  переменный ток в контуре вызывает индукционные токи, или так называемые экстратоки, в цепи. Последние являются причиной возникновения индуктивного сопротивления проводников переменному току.

Изменения величины коэффициента самоиндукции, например при внесении в область контура магнитного материала, также индуцируют экстратоки в цепи в соответствии с (21.7). Если имеется прибор для измерения индуктивности, то, регистрируя величины  $L_0$  в отсутствие сердечника в контуре и  $L_1$  при наличии однородного магнетика, заполняющего все пространство, где существует магнитное поле, можно определить магнитную проницаемость вносимого материала:

$$\mu = \frac{L_1}{L_0}.$$

Обычно для этих целей используют контур в виде длинного соленоида или тороида.

#### 21.4. Энергия магнитного поля

Электрический ток обладает запасом энергии. В этом легко убедиться, если в неподвижной цепи, включающей катушку достаточной индуктивности и источник тока, переключить ключ с источника на проводник с омическим сопротивлением. Опыт показывает, что температура проводника увеличивается за счет преобразования части энергии тока в теплоту.

Свяжем магнитную энергию проводящего контура с силой тока, идущего по нему. Для упрощения расчета будем пренебрегать омическим сопротивлением проводников, полагая его равным нулю. Это всегда можно сделать, ибо рассматриваемая энергия может зависеть только от силы тока и магнитных свойств среды, но не от сопротивления проводов. Такое приближение позволяет не учитывать потери энергии на джоулево тепло.

Пусть контур неподвижен, и при подключении к источнику сила тока в нем возрастает от нуля до некоторого значения  $I_0$ .

С появлением тока возникает магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром, причем ввиду переменного значения  $\Phi_B = LI$  в контуре индуцируется ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -L \frac{dI}{dt}.$$

При этом мы предположили, что вблизи контура отсутствуют ферромагнетики ( $L = \text{const}$ ). Для поддержания протекания тока источник совершает работу против этой ЭДС:

$$dA_{\text{ист}} = -\mathcal{E}_{\text{инд}} Idt = \frac{d\Phi_B}{dt} Idt = Id\Phi_B.$$

Как уже говорилось (разд. 15.4), современные представления основываются на концепции поля, и опыты с переменными электромагнитными полями свидетельствуют о том, что именно поля являются носителями энергии. Так как, согласно нашему предположению, работа не будет расходоваться на перемагничивание ферромагнетиков, то она целиком идет на увеличение энергии контура с током, которая локализована в возбуждаемом током магнитном поле:

$$dU_M = dA_{\text{ист}} = Id\Phi_B.$$

В нашем случае

$$d\Phi_B = LdI.$$

Таким образом, энергия, запасаемая контуром с током,

$$U_M = \int_0^{I_0} LI dI = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{\Phi_{B0}^2}{2L} = \frac{I_0 \Phi_{B0}}{2}. \quad (21.8)$$

Для полученного выражения (21.8) несущественно, чтобы контур сохранял неизменной форму. Энергия — это функция состояния, и она не зависит от того, как система была переведена в это состояние.

Выразим величину  $U_M$  через значение магнитной индукции. Как и в электростатике (разд. 15.4), вначале рассмотрим случай однородного магнитного поля, реализуемый в длинном соленоиде. Индукция магнитного поля в таком контуре, согласно (18.9),

$$B = \mu\mu_0 \frac{\mathcal{N}}{l} I,$$

отсюда

$$I = \frac{Bl}{\mu\mu_0\mathcal{N}}.$$

Индуктивность контура (21.6)

$$L = \mu\mu_0 \frac{\mathcal{N}^2}{l} S.$$

Подставим выражения для величин  $L$  и  $I$  в формулу (21.8):

$$U_M = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu\mu_0 \frac{\mathcal{N}^2}{l} S \frac{B^2 l^2}{\mu^2 \mu_0^2 \mathcal{N}^2} = \frac{1}{2\mu\mu_0} B^2 Sl = \frac{1}{2\mu\mu_0} B^2 V,$$

где  $V$  — объем соленоида. Введем объемную плотность энергии магнитного поля:

$$\omega_M(\vec{r}) = \frac{dU_M}{dV}. \quad (21.9)$$

В случае однородного поля

$$\omega_M(\vec{r}) = \frac{1}{2\mu\mu_0} B^2(\vec{r}).$$

Рассуждая аналогично разд. 15.4, приходим к тому, что это выражение справедливо для любых неоднородных магнитных полей, в том числе и переменных.

Зная значение модуля вектора  $\vec{B}$  в любой точке, где существует магнитное поле, можно найти полную энергию этого поля:

$$U_M = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \frac{B^2(\vec{r})}{\mu} dV. \quad (21.10)$$

## § 22. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ МАКСВЕЛЛА

Мы рассмотрели основные законы электрических и магнитных явлений. Эти законы были установлены опытным путем. Английский ученый Дж.К. Максвелл, обобщая открытые закономерности, придал теории электромагнетизма строгую математическую форму в виде четырех фундаментальных уравнений. Он показал, что эта система уравнений верна и для переменных полей, а также что из нее следует возможность существования электромагнитных волн.

### 22.1. Максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции

Обсуждая правило Ленца (разд. 20.2), мы рассмотрели пример движения в магнитном поле проводника, являющегося составной частью замкнутого контура. В контуре возникал индукционный ток, причиной которого было действие силы Лоренца. Указанная сила в данном случае выступала в роли сторонней силы. Однако, анализируя опыты Фарадея, мы видели, что индукционный ток возникает и в неподвижном контуре при изменении индукции магнитного поля. Возникает вопрос: какая сила в этом случае является сторонней и возбуждает электрический ток?

Ответ был дан Максвеллом. В его трактовке *всякое переменное магнитное поле приводит к появлению в окружающем пространстве особого вида электрического поля*. Это поле и обуславливает протекание тока. Вспомним, что ЭДС связана с напряженностью поля сторонних сил (16.26):

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}.$$

С учетом этого соотношения закон Фарадея может быть записан в виде

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} d\vec{S}, \quad (22.1)$$

где для краткости пропущен индекс, отражающий некулоновскую природу электрического поля, а интеграл в правой части берется по поверхности, ограниченной контуром  $L$ .

Будем считать, что контур неподвижен относительно данной системы отсчета. Тогда последовательность интегрирования в правой части (22.1) по поверхности  $\Sigma$  и дифференцирования по времени можно изменить:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (22.2)$$

Частная производная вектора  $\vec{B}$  по времени отражает тот факт, что при неподвижном контуре  $L$  изменение магнитного потока в (22.1) со временем обусловлено только временной зависимостью вектора  $\vec{B}$ .

Электрическое поле в соотношении (22.2) не связано с присутствием зарядов, и его линии замкнуты. Таким свойством обладают вихревые поля. Следовательно, *всякое изменение магнитного поля во времени возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле*. Это первое положение теории Максвелла.

Мы видим, что понимание закона электромагнитной индукции Фарадеем и Максвеллом несколько различно. Первый видит явление в возникновении индукционного тока, для наблюдения которого необходим замкнутый проводник. Максвелл трактует электромагнитную индукцию как возбуждение электрического поля. Появление индукционного тока в замкнутом проводнике есть лишь одно из проявлений этого поля.

Формулировка Максвелла рассматривается как более общая. Уравнение (22.2) является одним из фундаментальных соотношений электродинамики.

## 22.2. Ток смещения

В предыдущем разделе было показано, что с изменяющимся во времени магнитным полем связано вихревое электрическое поле. Максвелл пришел к выводу, что должна быть определенная симметрия во взаимозависимости электрического и магнитного полей, и, следовательно, переменное электрическое поле будет порождать магнитное поле. Это утверждение является вторым положением теории электромагнитного поля. Так как магнитное поле всегда связано с протеканием тока, то указанное переменное электрическое поле было названо Максвеллом *током смещения*.

Существование тока смещения можно продемонстрировать в опыте с конденсатором. Если в цепи постоянного тока последовательно включены электрическая лампочка и конденсатор, то ток в цепи отсутствует, и лампочка не горит. При подключении указанной цепи к источнику переменного тока соответствующего напряжения и частоты нить лампочки будет накаливаться. Согласно Максвеллу, ток проводимости в проводах замыкается током смещения в конденсаторе.

Необходимость существования некоего переменного тока в конденсаторе следует также из теоремы о циркуляции вектора  $\vec{E}$ . Пусть предварительно заряженный конденсатор замкнут

проводником (рис. 22.1). Во внешней цепи определенное время будет протекать электрический ток. Выберем в качестве контура интегрирования для указанной теоремы линию вектора  $\vec{B}$  (рис. 22.1). Согласно разд. 18.1,

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (22.3)$$

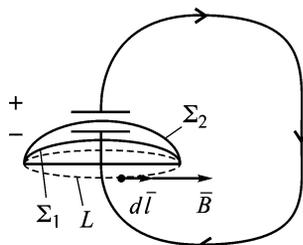


Рис. 22.1

В правой части соотношения (22.3) фигурирует сила тока через поверхность, ограниченную выбранным контуром интегрирования, причем поверхность может как пересекать подводящие провода ( $\Sigma_1$ ), так и быть проведена между пластинами конденсатора ( $\Sigma_2$ ). Так как левая часть (22.3) является вполне определенной положительной величиной, то и токи через указанные поверхности должны быть равными. Если между пластинами конденсатора существует определенная утечка, то в выражении (22.3) при выборе поверхности  $\Sigma_2$  следует учитывать полный ток, являющийся суммой токов смещения и проводимости.

Свяжем количественно ток смещения с характеристиками переменного электрического поля. Пусть цепь состоит из идеального (без утечки) плоского конденсатора и проводника с малым сопротивлением. Тогда можно считать, что в конденсаторе протекает только ток смещения, а в проводе — только ток проводимости и они равны друг другу. Ток через конденсатор связан с зарядом  $q$  на его обкладках:

$$I_{\text{см}} = \frac{dq}{dt}. \quad (22.4)$$

Заряд на обкладке конденсатора

$$q = \sigma S = \epsilon \epsilon_0 ES, \quad (22.5)$$

где  $E$  — напряженность электрического поля внутри конденсатора,  $S$  — площадь его пластин.

Подставляя (22.5) в (22.4), получаем

$$I_{\text{см}} = \epsilon \epsilon_0 S \frac{dE}{dt}. \quad (22.6)$$

Удобно ввести плотность тока смещения

$$\vec{j}_{\text{см}} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (22.7)$$

Соотношение (22.7) верно не только для однородного, но и для произвольного поля  $\vec{E}$ . Замена знака полной производной в (22.6) на знак частной производной в (22.7) связана с тем обстоятельством, что для неоднородного поля вектор  $\vec{E}$  зависит не только от времени, но и от пространственных координат.

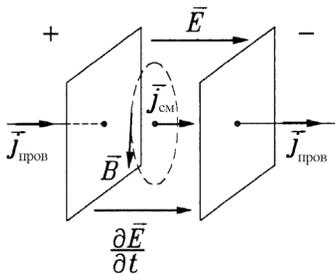


Рис. 22.2

Магнитное поле тока смещения точно такое же, как и тока проводимости. Так, в примере на рис. 22.2 изображен момент, когда модуль вектора  $\vec{E}$  растет.

Как уже отмечалось, в общем случае при расчете индукции магнитного поля необходимо учитывать полный ток, плотность которого

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j}_{\text{пров}} + \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (22.8)$$

Соотношение между компонентами в правой части (22.8) зависит от электропроводности среды. Очевидно, в проводниках преобладает ток проводимости, в диэлектриках — ток смещения. С учетом (22.8) сила тока, протекающего через произвольную поверхность  $\Sigma$ ,

$$I = \int_{\Sigma} \left( \vec{j}_{\text{пров}} + \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (22.9)$$

### 22.3. Система уравнений Максвелла

Первое уравнение Максвелла было получено в разд. 22.1:

$$(I) \quad \oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Вторым уравнением системы является аналитическая запись теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции с учетом тока смещения (22.9):

$$(II) \quad \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu\mu_0 \int_{\Sigma} \left( \vec{j}_{\text{пров}} + \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (22.10)$$

Третьим и четвертым уравнением системы будут математические формы теорем Гаусса для электрического и магнитного полей:

$$(III) \quad \oint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon\epsilon_0};$$

$$(IV) \quad \oint_{\Sigma} \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Величины  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  называют материальными константами.

В ряде случаев (§ 16) ток проводимости можно связать с вектором  $\vec{E}$  посредством закона Ома:

$$\vec{j}_{\text{пров}} = \frac{1}{\rho} \vec{E}.$$

Соотношения I–IV являются фундаментальными уравнениями электродинамики. Они описывают электромагнитные поля в широком диапазоне частот  $\nu$  — от статики ( $\nu = 0$ ) до оптического диапазона ( $\nu \sim 10^{15}$  Гц).

В заключение этого раздела сделаем ряд замечаний.

1. Уравнения I–IV приведены в так называемой интегральной форме. При этом предполагается, что среда однородна и изотропна, то есть  $\epsilon$  и  $\mu$  постоянны и не зависят от направления.

2. Уравнения Максвелла отражают тот факт, что источниками электрического поля могут быть либо заряды, либо магнитные поля, меняющиеся во времени. Магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися зарядами (токами), либо переменными электрическими полями.

3. Уравнения не симметричны относительно векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но отсутствуют магнитные.

4. В случае вакуума ( $q = 0$ ,  $\vec{j}_{\text{пров}} = 0$ ) система уравнений становится полностью симметричной. При этом в уравнении II ток смещения начинает играть первостепенную роль. Преобразуя и комбинируя уравнения I и II, можно получить так называемое волновое уравнение, свидетельствующее о существовании электромагнитных волн. Понимание этого обстоятельства позволило Максвеллу с блестящим успехом развить электромагнитную теорию света.

5. Если векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  не зависят от времени, уравнения I и II оказываются не связанными друг с другом. Это случай электростатики и магнитостатики.



# ЛИТЕРАТУРА

## *Основная*

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Т. I, II. М.: Наука, 1989 (1-е изд. — 1977–1978).

## *Дополнительная*

2. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики. 3-е изд., стереотип. СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2008. 768 с. (2-е изд., М.: Наука, 1971. 751 с.)
3. *Калашников С.Г.* Электричество: Учеб. пособие. 6-е изд., стереотип. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 624 с.
4. *Иродов И.Е.* Основные законы механики. 10-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 309 с.
5. *Иродов И.Е.* Основные законы электромагнетизма. 7-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 319 с.
6. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. 3-е изд. М.: ОНИКС 21 век: Мир и образование, 2003. 432 с.
7. Берклевский курс физики. Т. 1, 2. М.: Наука, 1975–1977.
8. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 1, 3. М.: Наука, 1977–1986.
9. *Белов Д.Ф.* Механика: Учеб. пособие. М.: физический ф-т МГУ: НЭВЦ ФИПТ, 1988. 144 с.
10. *Белов Д.Ф.* Электричество и магнетизм. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981.



# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	3
--------------------------	---

## Часть I . МЕХАНИКА

<b>Введение</b> .....	4
-----------------------	---

<b>§ 1. Кинематика материальной точки</b> .....	5
---	---

1.1. Основные определения .....	5
---------------------------------	---

1.2. Линейные характеристики движения .....	6
---	---

1.3. Угловые характеристики движения.....	10
---	----

1.4. Преобразование линейных характеристик движения .....	14
---	----

<b>§ 2. Кинематика абсолютно твердого тела</b> .....	15
--	----

2.1. Описание движения твердого тела.....	15
---	----

2.2. Плоское движение твердого тела .....	16
---	----

<b>§ 3. Динамика материальной точки</b> .....	19
---	----

3.1. Первый закон Ньютона .....	19
---------------------------------	----

3.2. Второй закон Ньютона.....	21
--------------------------------	----

3.3. Третий закон Ньютона.....	23
--------------------------------	----

3.4. Типы сил в механике .....	24
--------------------------------	----

3.5. Принцип относительности Галилея.....	26
---	----

<b>§ 4. Динамика вращательного движения твердого тела</b> .....	27
---	----

4.1. Моменты силы и импульса относительно точки.....	27
--	----

4.2. Уравнение моментов для системы материальных точек.....	29
---	----

4.3. Уравнение моментов для вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.....	30
---	----

<b>§ 5. Динамика плоского движения твердого тела</b> .....	34
--	----

5.1. Центр масс системы материальных точек.....	34
---	----

5.2. Уравнение моментов для системы материальных точек относительно центра масс.....	36
---	----

5.3. Уравнения динамики плоского движения твердого тела.....	38
--	----

5.4. Расчет моментов инерции твердых тел.....	40
---	----

5.5. Теорема Гюйгенса—Штейнера .....	43
--------------------------------------	----

<b>§ 6. Работа силы, мощность, энергия</b> .....	44
6.1. Работа сил.....	44
6.2. Потенциальная энергия .....	46
6.3. Примеры расчета потенциальной энергии для некото- рых типов силовых полей .....	49
6.4. Кинетическая энергия.....	53
6.5. Полная механическая энергия материальной точки.....	55
<b>§ 7. Законы сохранения в механике</b> .....	56
7.1. Закон сохранения механической энергии.....	56
7.2. Закон сохранения импульса .....	59
7.3. Реактивное движение. Уравнение Мещерского.....	60
7.4. Закон сохранения момента импульса.....	61
7.5. Комментарии к теме «Законы сохранения в механике».....	63
<b>§ 8. Понятие о тензоре инерции</b> .....	64
8.1. Связь векторов $\vec{M}$ и $\vec{\omega}$ в общем случае.....	64
8.2. Главные оси инерции.....	66
8.3. Свободные оси вращения .....	67
<b>§ 9. Гироскоп</b> .....	69
9.1. Свободный гироскоп.....	69
9.2. Движение гироскопа под действием внешней силы.....	70

## Часть II. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

<b>Введение</b> .....	72
<b>§ 10. Закон Кулона. Электрическое поле</b> .....	73
10.1. Электрический заряд .....	73
10.2. Закон Кулона .....	73
10.3. Напряженность электрического поля.....	75
10.4. Принцип суперпозиции .....	76
10.5. Линии электрического поля .....	80
<b>§ 11. Теорема Гаусса</b> .....	82
11.1. Поток произвольного векторного поля.....	82
11.2. Теорема Гаусса.....	84
11.3. Примеры применения теоремы Гаусса для расчета напряженности электрического поля .....	86
<b>§ 12. Работа сил электростатического поля. Потенциал</b> .....	90
12.1. Потенциал, разность потенциалов.....	90

12.2. Пример расчета потенциала протяженной системы зарядов .....	93
12.3. Принцип суперпозиции для потенциалов.....	94
<b>§ 13. Электрический диполь .....</b>	<b>96</b>
13.1. Поле точечного диполя .....	97
13.2. Диполь во внешнем электрическом поле.....	98
<b>§ 14. Диэлектрики в электрическом поле.....</b>	<b>100</b>
14.1. Электрическое поле в диэлектриках.....	101
14.2. Механизмы поляризации диэлектриков.....	102
14.3. Вектор поляризации среды. Локальное поле .....	104
14.4. Связанные заряды .....	107
14.5. Примеры расчета электрических полей в диэлектриках.....	108
<b>§ 15. Проводники в электрическом поле.....</b>	<b>109</b>
15.1. Поле заряженного проводника.....	109
15.2. Замкнутые проводящие оболочки.....	112
15.3. Емкость.....	113
15.4. Энергия электрического поля .....	116
<b>§ 16. Постоянный электрический ток .....</b>	<b>117</b>
16.1. Плотность и сила электрического тока .....	118
16.2. Закон Ома в дифференциальной форме .....	120
16.3. Закона Джоуля–Ленца в дифференциальной форме .....	122
16.4. Закон Ома в интегральной форме.....	124
16.5. Закон Джоуля–Ленца в интегральной форме.....	127
16.6. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа .....	129
16.7. Стационарные токи в массивных проводниках.....	130
<b>§ 17. Законы взаимодействия токов.....</b>	<b>133</b>
17.1. Закон Ампера для элементов тока .....	133
17.2. Магнитное поле. Принцип суперпозиции .....	136
17.3. Примеры расчета индукции магнитного поля .....	138
17.4. Магнитное поле движущегося заряда .....	141
17.5. Сила Лоренца.....	142
<b>§ 18. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции.....</b>	<b>143</b>
18.1. Интегральные теоремы электростатики и магнитостатики .....	143
18.2. Доказательство теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции .....	145
18.3. Применение теоремы о циркуляции для расчета индукции магнитного поля .....	147

<b>§ 19. Магнитный диполь</b> .....	148
19.1. Поле магнитного диполя .....	149
19.2. Магнитный диполь во внешнем поле.....	150
19.3. Магнитное поле в веществе.....	152
<b>§ 20. Закон электромагнитной индукции Фарадея</b> .....	153
20.1. Опыты Фарадея.....	154
20.2. Правило Ленца. Закон электромагнитной индукции.....	155
20.3. Работа, совершаемая при перемещении проводника с током в магнитном поле .....	156
<b>§ 21. Взаимная индукция. Самоиндукция</b> .....	158
21.1. Взаимная индукция .....	158
21.2. Теорема взаимности .....	160
21.3. Самоиндукция.....	161
21.4. Энергия магнитного поля .....	162
<b>§ 22. Теория электромагнитного поля Максвелла</b> .....	164
22.1. Максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции .....	165
22.2. Ток смещения .....	166
22.3. Система уравнений Максвелла .....	168
<b>Литература</b> .....	171



*Учебное издание*

**Кашкаров Павел Константинович,  
Ефимова Александра Ивановна**

**МЕХАНИКА И ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ**

Художественный редактор

*Ю.М. Добрянская*

Технический редактор

*З.С. Кондрашова*

Художник

*В.А. Чернецов*

Корректоры

*Н.И. Коновалова*

Компьютерная верстка

*Л.В. Тарасюк*

Подписано в печать 20.12.2010.

Формат 60 × 90 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офс. № 1.

Офсетная печать. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 11,0. Уч.-изд. Тираж экз.

Изд. № 9055. Заказ .

Ордена «Знак Почета»

Издательство Московского университета.

125009, Москва, ул. Б. Никитская, 5/7.

Тел.: 629-50-91. Факс: 697-66-71.

939-33-23 (отдел реализации).

*E-mail:* secretary-msu-press@yandex.ru

*Сайт Издательства МГУ:* [www.msu.ru/depts/MSUPub12005](http://www.msu.ru/depts/MSUPub12005)

*Адрес отдела реализации:* Москва, ул. Хохлова, 11 (Воробьевы горы, МГУ).

*E-mail:* [izd-mgu@yandex.ru](mailto:izd-mgu@yandex.ru). Тел.: (495) 939-33-23.

*Интернет-магазин:* <http://msupublishing.ru>