Конспект лекций по физике с разбором задач для студентов 1 курса химического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

доцент А.В. Павликов

2025

Это пособие предназначено для студентов 1 курса химического факультета Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова, посещающих факультативный курс по физике. Оно представляет собой конспект лекций, которые читает автор. Для наглядной иллюстрации законов и лучшего их понимания рассматриваются некоторые задачи. Цель этого курса состоит в том, чтобы помочь повторить физику тем студентам 1 курса, которые не сдавали соответствующий экзамен по выбору. Одновременно с этим, данный курс может быть полезен и остальным первокурсникам, поскольку в нем применяется более сложный математический аппарат, чем в рамках школьного курса.

Оглавление

Глава 1

Механика

1.1 Кинематика

Кинематика – раздел механики, изучающий движение тел без анализа причин, обусловливающих это движение. Простейшей моделью физического тела является материальная точка (МТ). Это тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

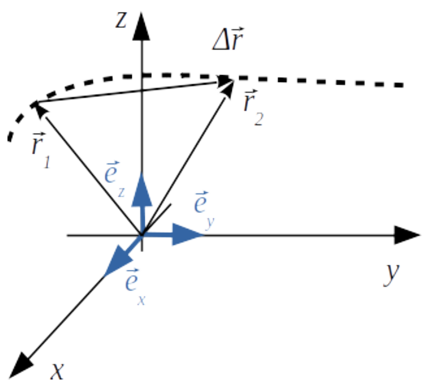


Рис. 1.1: Положение МТ в моменты времени t_1 и t_2

Положение МТ в прямоугольной декартовой системе координат задается радиус-вектором, проведенным из начала координат к данной точке. Радиус- вектор можно записать через проекции на оси и единичные вектора, направленные вдоль координатных осей:

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e_x} + y(t) \cdot \vec{e_y} + z(t) \cdot \vec{e_z}, \tag{1.1}$$

где $\vec{e_x}, \vec{e_y}$ и $\vec{e_z}$ единичные вектора вдоль осей *x, y* и *z* соответственно, а *x(t), y(t)* и *z(t)* проекции радиус-вектора на соответствующие оси.

На рис. 1.1 пунктиром обозначена траектория движения МТ. Из того же рисунка видно, что вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ зависит от выбора моментов времени t_1 и t_2. Поэтому, устремляя интервал времени к нулю, мы приходим к понятию мгновенной скорости. Мгновенная скорость МТ есть первая производная радиус-вектора по времени. В декартовой системе координат:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x \cdot \vec{e_x} + v_y \cdot \vec{e_y} + v_z \cdot \vec{e_z}, \tag{1.2}$$

где проекции вектора скорости на координатные оси $v_x = \dot{x}(t), v_y = \dot{y}(t)$ и $v_z = \dot{z}(t)$ являются производными по времени соответствующих скалярных функций.

Точно так же мы определяем вектор полного ускорения, как производную скорости по времени:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x \cdot \vec{e_x} + a_y \cdot \vec{e_y} + a_z \cdot \vec{e_z}, \tag{1.3}$$

где проекции вектора ускорения на координатные оси $a_x = \dot{v_x}(t) = \ddot{x}(t), a_y = \dot{v_y}(t) = \ddot{y}(t)$ и $a_z = \dot{v_z}(t) = \ddot{z}(t)$

Например, для равноускоренного движения вдоль оси y:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ v_y(t) &= v_{0y} + a_y t \\ a_y(t) &= a_y \end{aligned} \tag{1.4}$$

Модуль любого вектора находится, как квадратный корень из суммы квадратов проекций вектора на оси координат. Для модуля вектора ускорения:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{1.5}$$

Пройденный путь s можно найти по формуле:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} dt \tag{1.6}$$

Задачи

1. Радиус-вектор МТ определяется выражением $\vec{r} = 3t^2 \cdot \vec{e_x} + 4t^2 \cdot \vec{e_y} + 7 \cdot \vec{e_z}$ (м). Вычислить а) путь s, пройденный МТ за первые 10 с движения, б) модуль перемещения $|\Delta\vec{r}|$ за это время, в) объяснить полученный результат.

2. Компоненты скорости МТ изменяются со временем по законам: $V_x = V_0 \cdot \cos\omega t, V_y = V_0 \cdot \sin\omega t, V_z = 0$, где V_0 и ω – константы. Найти модуль скорости МТ, модуль ускорения, а также угол между векторами скорости и ускорения. На основании полученных результатов сделать вывод о характере движения МТ.

3. Двигатель ракеты сообщает ей при взлёте постоянное ускорение $\vec{a}$, составляющее угол α с горизонтом. Через время τ после старта двигатель выключают. Найти расстояние L между точками старта и падения ракеты, считая, что её движение началось без начальной скорости.

Решения

1. Для ответа на пункт а) воспользуемся 1.6. Для этого сперва рассчитаем: $v_x = 6t, v_y = 8t, v_z = 0$.

   Интегрирование дает: $s = \int_0^{10} \sqrt{64t^2 + 36t^2} dt = \frac{10t^2}{2}\Big|_0^{10} = 500$ м.

   Отвечая на вопрос пункта б), воспользуемся формулой для определения расстояния между точками:
   $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{300^2 + 400^2 + 0^2} = 500$ м.
   Чтобы ответить на вопрос пункта в), нужно выяснить по какой траектории движется МТ. Поскольку координата z не меняется со временем, то движение происходит в плоскости $z = 7$. Траектория представляет из себя прямую $y = \frac{4}{3}x$. Поэтому пройденный путь совпадает модулем вектора перемещения.

2. Модуль вектора скорости и ускорения найдем по формулам 1.5.

$$|\vec{v}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{V_0^2 \cdot \cos^2\omega t + V_0^2 \cdot \sin^2\omega t} = V_0$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(-V_0\omega)^2 \sin^2\omega t + (V_0\omega)^2 \cos^2\omega t} = \omega V_0$$

   Скалярное произведение найдём по формуле:

$$(\vec{v}\cdot\vec{a}) = v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y = -V_0^2 \cdot \cos(\omega t) \cdot \omega \sin(\omega t) + V_0^2 \cdot \sin(\omega t) \cdot \omega \cos(\omega t) = 0$$

   Таким образом, вектора $\vec{v}$ и $\vec{a}$ взаимно ортогональны. А с учетом того, что координаты x и y тоже меняются по гармоническому закону, то можно показать, что они удовлетворяют каноническому уравнению окружности: $x^2 + y^2 = \left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2$. Из этого следует, что МТ движется по окружности радиуса $\frac{V_0}{\omega}$ с постоянной по модулю скоростью V_0.

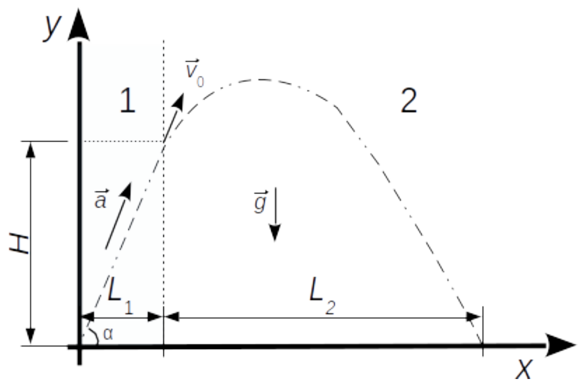


Рис. 1.2: Траектория полета ракеты.

3. Разобьем задачу на две вспомогательные: прямолинейное движение на 1-ом участке и движение по параболической траектории на 2-ом участке (см. рис. 1.2). Тогда $L = l_1 + l_2$. Поскольку движение на 1-ом участке вдоль оси x равноускоренное и без начальной скорости, то согласно 1.4 имеем: $l_1 = \frac{1}{2}a_x\tau^2$. ($a_x$ - проекция ускорения на ось x).
   Движение вдоль оси x на 2-ом участке является равномерным, т.е. происходит с постоянной скоростью v_{0x}, которая получена в конце 1-ого участка. Поэтому $l_2 = v_{0x}t_{fl}$. Здесь t_{fl} - время полета по паробалической траектории до момента падения. Время полета найдем из условия:

$$0 = H + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t_{1,2} = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 2gH}}{g}$$

   Физический смысл имеет только положительный корень. Поэтому l_2 найдено. Остается только выразить начальную скорость $v_{0x} = a_y\tau$ на втором участке и максимальную высоту подъема на 1-ом участке $H = \frac{a_y\tau^2}{2}$. Окончательно получим:

$$L = \frac{1}{2}a_x\tau^2 + \frac{a_x a_y\tau^2}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{g}{a_y}}\right),$$

   где $a_x = a\cos\alpha, a_y = a\sin\alpha$.

1.2 Динамика

Изучая механическое движение, динамика выясняет причины того или иного характера этого движения. Они обусловлены взаимодействием между телами. Мерой взаимодействия тела с окружающими его телами и полями является сила. В системе СИ она измеряется в ньютонах (Н).

Силы по природе бывают гравитационными, электромагнитными, ядерными и слабыми. Два последних типа проявляются лишь на малых расстояниях, когда законы классической механики неприменимы. Таким образом, при решении задач мы имеем дело только с двумя первыми типами: гравитационными - сила тяжести и всеми остальными, имеющими электромагнитную природу.

Основными законами динамики являются три закона Ньютона. Первый закон постулирует существование инерциальных систем отсчета, в которых справедливы два других закона ньютоновской динамики. Первый закон гласит:
существуют системы отсчета, в которых тело движется прямолинейно и равномерно, если на него не действуют другие тела или их действие скомпенсировано.

Второй закон связывает векторную сумму сил, действующих на тело и ускорение тела. Напомним, что в системе СИ ускорение измеряется в м/с^2.
Ускорение тела пропорционально равнодействующей сил, приложенных к телу. Коэффициентом пропорциональности является инертная масса m. Основное единицей измерения массы в системе СИ является килограмм (кг).

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \tag{1.7}$$

Третий закон Ньютона устанавливает взаимосвязь между силами, с которыми тела действуют друг на друга.

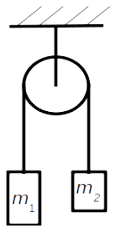
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{1.8}$$

Тела взаимодействуют с силами равными по модулю, направленными в противоположные стороны. Эти силы приложены к разным телам, но имеют одну и ту же природу.

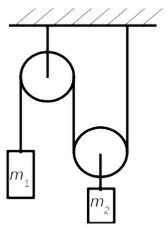
Далее предлагаются задачи на динамику. Среди них есть задачи с блоками, где всюду блок считается невесомым, а в оси блока отсутствует трение. Нити считаются невесомыми и нерастяжимыми.

Задачи

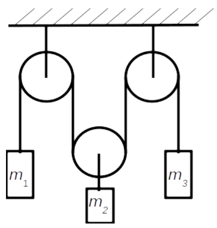
1. С каким ускорением и в каком направлении будут двигаться грузы с массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$), если эти грузы связаны нитью, перекинутой через неподвижный блок? (см. рис. с блоками 1)



2. Найти силу натяжения T нити в устройстве, изображенном на рис. 2, если массы тел $m_1 = 100$ г, $m_2 = 300$ г.



3. Найти ускорения тел, изображенных на рис. 3. Массы тел $m_1 = 100$ г, $m_2 = 200$ г и $m_3 = 300$ г.

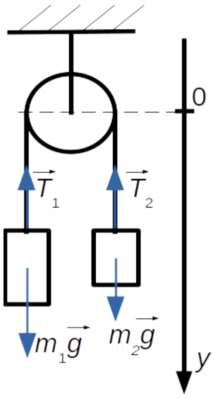


4. Найти ускорение бруска соскальзывающего с наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент сухого трения между поверхностью бруском и наклонной плоскостью равен $\mu < \arctan(\alpha)$.

5. Найти минимальную скорость тела, имея которую, оно будет двигаться по круговой орбите вокруг Земли. Масса Земли $M = 5,97 \cdot 10^{24}$ кг, радиус орбиты считать равным радиусу Земли $R = 6400$ км. Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2).

Решения

1. Для решения задачи воспользуемся законами динамики (см. 1.7 1.8). При решении задач нам потребуется выбрать координатные оси и записать 2-ой закон Ньютона в проекции на эти оси. Кроме этого может потребоваться уравнение кинематической связи. В



данном случае направим ось y вертикально вниз, и для каждого груза запишем второй закон Ньютона в проекции на эту ось. На каждый груз действует сила тяжести и натяжения нити:

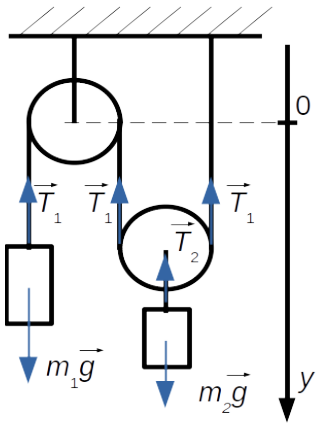
$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \end{cases}$$

Учитывая то, что нити и блоки невесомы, а трение в оси блока отсутствует, мы можем заключить, что сила $\vec{T_1}$ равна по модулю $\vec{T_2}$. Если же учитывать массу блока или трение в оси, то необходимо записать уравнение динамики вращательного движения для блока. Это даст дополнительное уравнение связи для сил натяжения, но при этом они не будут равны друг другу. По условию нашей задачи это уравнение не требуется учитывать.
А уравнение кинематической связи нам понадобится, чтобы связать проекции ускорений a_1 и a_2. Для этого нам потребуется условие нерастяжимости нити: $y_1(t) + y_2(t) = l$. Эта запись означает, что сумма координат грузов y_1 и y_2 всегда равна длине нити l. Продифференцировав дважды по времени, получим: $a_1 + a_2 = 0$. Подставляя эти соотношения в систему, решим её относительно a_1:

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Отметим, что в случае равенства масс, грузы не будут иметь ускорения. При выполнения неравенства $m_1 < m_2$ ускорение будет иметь другой знак.

2. Решая задачу с одним подвижным и одним неподвижным блоками получим аналогичную систему уравнений, используя второй закон Ньютона. Сила натяжения нити перекинутый через оба блока и



той, на которой подвешен второй будут связаны следующим образом: $T_2 = 2T_1$. Это является следствием невесомости подвижного блока. А уравнение кинематической связи в данном случае будет выглядеть так: $a_1 + 2a_2 = 0$. Решая систему, получим для силы натяжения:

$$T_1 = \frac{3m_1m_2}{4m_1 + m_2}g.$$

3. Для двух неподвижных и одного подвижного блока аналогично предыдущим задачам запишем систему уравнений. В общем случае она будет состоять из пяти уравнений: три по 2-ому закону Ньютона для каждого груза, одно для невесомого подвижного блока и уравнение кинематической связи.

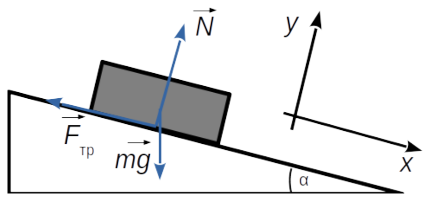
$$\begin{cases} m_1g - T_1 = m_1a_1 \\ m_2g - T_2 = m_2a_2 \\ m_3g - T_1 = m_3a_3 \\ T_2 = 2T_1 \\ a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

Удобно подставить четвертое уравнение во второе и решить систему из четырех уравнений относительно четырех неизвестных

a_1, a_2, a_3, T_1. По условию задачи нас интересуют только ускорения.

$$a_1 = \frac{m_1m_2 + 4m_1m_3 - 3m_2m_3}{m_1m_2 + 4m_1m_3 + m_2m_3}$$
$$a_2 = \frac{m_1m_2 - 4m_1m_3 + m_2m_3}{m_1m_2 + 4m_1m_3 + m_2m_3}$$
$$a_3 = \frac{-3m_1m_2 + 4m_1m_3 + m_2m_3}{m_1m_2 + 4m_1m_3 + m_2m_3}$$

4. Для решения задачи про наклонную плоскость нам понадобится записать 2-ой закон Ньютона в проекции сразу на оси x и y. На брусок действуют силы: тяжести $m\vec{g}$, реакции опоры $\vec{N}$ и сухого трения $\vec{F}_{fr}$. В векторном виде 2-ой закон Ньютона для бруска:



$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{fr} = m\vec{a}$$

Ось x проведем вдоль наклонной плоскости, а ось y ей перпендикулярно. Проецируя на координатные оси:

$$\begin{cases} mg\sin(\alpha) - F_{fr} = ma_x \\ -mg\cos(\alpha) + N = ma_y = 0 \end{cases}$$

Правая часть второго уравнения равна нулю, т.к. проекция ускорения на ось y равна нулю. По условию задачи брусок соскальзывает вниз, а значит можно воспользоваться выражением для максимального значения силы трения: $F_{fr} = \mu N$. Подставляя в систему, получим:

$$a_x = g(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha))$$

Интересно рассмотреть два предельных случая: 1) отсутствие сухого трения, т.е. $\mu = 0$ и 2) $\mu \geq \tan(\alpha)$. В случае 1) брусок будет соскальзывать с максимальным ускорением $a_x = g\sin(\alpha)$, а в случае 2) будет покоится, если он не имел начальной скорости.

5. На тело действует сила всемирного тяготения: $|\vec{F}| = G\frac{Mm}{R^2}$. Начальная скорость направлена горизонтально. Сила, а вместе с ней

и ускорение, направлены к центру Земли и перпендикулярны скорости, поэтому траекторией движения будет окружность (см. задачу 2 из раздела "Кинематика"). Поскольку скорость векторная величина, а движение по окружности радиуса R сопровождается изменением направления вектора скорости $\vec{v}$, то следовательно, частица имеет ускорение. Оно называется центростремительным, т.к. направлено к центру окружности. Модуль его равен:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Тогда, по 2-ому закону Ньютона:

$$ma_n = G\frac{Mm}{R^2}$$
$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}$$
$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Расчеты дают: $v \approx 7,9$ км/с. Это скорость называется первая космическая.

1.3 Статика

Статика - это раздел механики, который изучает условия равновесия тел. Под равновесием подразумевается отсутствие поступательного и вращательного движения. Поэтому помимо равенства нулю суммы всех сил, действующих на тело:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \tag{1.9}$$

добавляется условие равенство нулю моментов сил:

$$\Sigma\vec{M} = 0 \tag{1.10}$$

Момент силы $\vec{M}$ - является векторной величиной и определяется следующим образом: $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$. Этот вектор направлен перпендикулярно плоскости xy, в которой лежат радиус-вектор $\vec{r}$ и вектор силы $\vec{F}$. Перпендикулярная ось, совпадающая с направлением $\vec{M}$, обозначается z, и при решении задач требуется использовать только проекции на эту ось. Поэтому условие 1.10 принимает вид:

$$\Sigma M_z = 0 \tag{1.11}$$

Основной единицей измерения момента силы в системе СИ является Н·м.

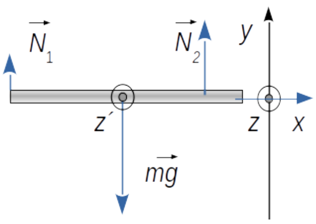
Задачи

1. Два друга держат горизонтально бревно массы m= 20 кг и длины L = 1 м. Один из них взялся за левый край, а второй на расстоянии a = 0,2 м от правого края. Какие силы давления $\tilde{N}_1$ и $\tilde{N}_2$ испытывают друзья? Бревно считать однородным.

2. Тяжелый цилиндрический каток массы m необходимо поднять на ступеньку высоты h. Найти минимальную силу $\vec{F}$, которую необходимо приложить к центру масс катка в горизонтальном направлении, если радиус катка r больше высоты ступеньки h.

Решения

1. На бревно действуют две силы реакции опоры $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Каждый из друзей испытывает силу давления, которая по 3-му закону Ньютона равна по модулю и противоположна по направлению силе реакции опоры: $\vec{\tilde{N}}_1 = -\vec{N}_1$ и $\vec{\tilde{N}}_2 = -\vec{N}_2$. Но главное, что силы давления и реакции опоры приложены к разным телам. Направим ось y вертикально вверх. При решении задач на статику существует свобода выбора оси вращения. Для данной задачи можно выбрать ось, проходящую через центр тяжести, т.е. посередине бревна, т.к. по условию оно однородно. Используя 1.9 и 1.11



получим систему:

$$\begin{cases} N_1 + N_2 - mg = 0 \\ \frac{l}{2}N_1 - (\frac{l}{2} - a)N_2 = 0 \end{cases}$$

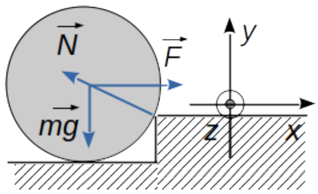
Решая систему уравнений, получим выражения для сил N_1 и N_2:

$$N_1 = \frac{l - 2a}{2(l - a)}mg$$

$$N_2 = \frac{l}{2(l - a)}mg$$

Подставляя численные значения, получим:
$N_1 = 75$ Н и $N_2 = 125$ Н. В расчетах полагалось, что $g = 10$ м/с^2.

2. Изобразим силы действующие на цилиндрический каток в момент времени, когда происходит отрыв от горизонтальной поверхности, и он упирается в угол ступеньки. На каток действуют три силы:



тяжести $m\vec{g}$, горизонтальная сила $\vec{F}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Для решения задачи достаточно записать лишь условие равенства нулю суммы проекций моментов сил на ось z.

$$FR\sin\alpha - mgR\cos\alpha = 0$$
$$F = mg\cot\alpha = mg\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$$

1.4 Законы сохранения

Импульс тела - это произведение массы на скорость $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$. Как следует из определения, эта величина векторная. Она измеряется в кг$\cdot$(м/с^2). Импульс системы тел является векторной суммой импульсов тел, входящих в систему $\vec{P} = \Sigma\vec{p}_i$.

Следствием законов динамики (см. выражения 1.7 и 1.8) является закон изменения импульса:
изменение импульса системы равно импульсу внешних силы:

$$\Delta\vec{P} = \Sigma\vec{F}^{ext}\Delta t, \tag{1.12}$$

где $\Sigma\vec{F}^{ext}$ - векторная сумма внешних сил, Δt - время действия. *Если импульс внешних сил равен нулю, то импульс системы сохраняется.* Это является содержанием закона сохранения импульса.

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = 0, \tag{1.13}$$

т.е. конечный импульс системы $\vec{P}_2$ равен начальному $\vec{P}_1$.

В общем случае механической работой силы называют величину определяемую, как интеграл:

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} \tag{1.14}$$

Работа измеряется в джоулях (Дж). В частном случае однородного силового поля и прямолинейного перемещения, выражение 1.14 принимает вид $A = (\vec{F}\vec{r})$.

Если работа зависит только от начальной и конечной точки интегрирования, а не зависит от формы траектории, то такие силы называются потенциальными. Поэтому удобно ввести характеристику, которая называется потенциальной энергией W_p. Она связана с работой потенциальных сил следующим образом:

$$A_p = -(W_{p2} - W_{p1}) \tag{1.15}$$

Кинетическая энергия тела тоже скалярная величина:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} \tag{1.16}$$

Потенциальная и кинетическая энергия, как и работа, измеряются в джоулях. Полной механической энергией тела W называется сумма кинетической и потенциальной: $W = W_k + W_p$. Полной механической энергией системы называется алгебраическая сумма энергий тел, входящих в систему. Закон изменения энергии:
изменение полной механической энергии ΔW равно работе непотенциальных (диссипативных) сил A_{dis}:

$$\Delta W = \Sigma A_{dis}, \tag{1.17}$$

где ΣA_{dis} - это суммарная работа диссипативных сил. Примером таких сил является сила трения. В случае когда она совершает работу, то механическая энергия переходит в тепло, т.е. диссипирует. *Если же такие силы отсутствуют, либо силы не совершают работу, то полная механическая энергия системы сохраняется.* Это есть содержание закона сохранения полной механической энергии.

$$\Delta W = W_2 - W_1 = 0, \tag{1.18}$$

т.е. конечная полная механическая энергия системы W_2 равна начальной W_1.

Задачи

1. Какова средняя сила давления F на плечо при стрельбе из автомата, если масса пули $m = 10$ г, а скорость пули при вылете из ствола $v = 300$ м/с? Число выстрелов из автомата в единицу времени $n = 300$ мин$^{-1}$.

2. Мяч массы $m = 150$ г ударяется о гладкую стенку под углом $\alpha = 30°$ к ней и отскакивает без потери скорости. Найти среднюю силу F, действующую на мяч со стороны стенки, если скорость мяча $v = 10$ м/с, а продолжительность удара $\Delta t = 0{,}1$ с.

3. Из орудия массы $M = 3$ т, не имеющего противооткатного устройства (ствол жестко скреплен с лафетом), вылетает в горизонтальном направлении снаряд массы $m = 15$ кг со скоростью $v = 650$ м/с. Какую скорость u получает орудие при отдаче?

4. Пушка, стоящая на гладкой горизонтальной площадке, стреляет под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Масса снаряда $m = 20$ кг, его начальная скорость $v = 200$ м/с. Какую скорость u приобретает пушка при выстреле, если ее масса $M = 500$ кг?

5. Летящая с некоторой скоростью пуля попадает в мешок с песком и входит в него на глубину $l_1 = 15$ см. На какую глубину l_2 войдет в песок пуля той же массы, если скорость ее движения будет вдвое больше? Считать силу сопротивления движению пули в песке постоянной.

6. Происходит центральное соударение двух абсолютно упругих шаров, имеющих массы m_1, и m_2 и скорости v_1 и v_2 Найти скорости шаров после соударения.

Решения

1. Для нахождения силы давления воспользуемся законом изменения импульса 1.12. Запишем этот закон в проекции на ось x, которую направим горизонтально вдоль направления скорости пули. Тогда:

$$mv_x - 0 = F_x \Delta t$$
$$\Delta t = \frac{1}{n}$$
$$F_x = mv_x n$$

Выполним подстановку числовых значений: $F = 0,01 \cdot 300 \cdot \frac{300}{60} = 15$ Н.

2. Аналогично тому, как в предыдущей задаче, воспользуемся законом изменения импульса.

$$
\begin{aligned}
mv_x - (-mv_x) &= F_x \Delta t \\
v_x &= v \sin\alpha \\
F_x &= \frac{2mv\sin\alpha}{\Delta t}
\end{aligned}
$$

Для силы давления $F = \frac{2 \cdot 0{,}15 \cdot 10 \cdot 0{,}5}{0{,}1} = 15$ Н.

3. В данном случае воспользуемся законом сохранения импульса 1.13, т.к. сумма внешних сил равна нулю.

$$
\begin{aligned}
mv - Mu &= 0 \\
u &= \frac{mv}{M}
\end{aligned}
$$

Для скорости получим значение: $u = \frac{15 \cdot 650}{3000} = 3,25$ м/с.

4. Для решения данной задачи потребуется применить закон изменения импульса для системы, состоящей из орудия и снаряда. Суммарный импульс до выстрела был равен нулю, а после вектор суммарного импульса никак не может быть равен нулю, т.к. вектора импульса снаряда и пушки направлены под углом друг к другу. Но учитывая то, что вдоль горизонтальной оси x не действует никаких сил, то можно воспользоваться законом сохранения для проекции на эту ось.

$$
\begin{aligned}
mv_x - Mu &= 0 \\
v_x &= v\cos\alpha \\
u &= \frac{mv\cos\alpha}{M}
\end{aligned}
$$

Расчёт даёт: $u = \frac{20 \cdot 200 \cdot 0{,}87}{500} \approx 6,9$ м/с

5. Эта задача решается с использованием закона изменения энергии 1.17. Начальная кинетическая энергия уменьшается за счет работы силы трения. Потенциальная энергия при этом не меняется.

$$
\begin{cases}
0 - \frac{mv_1^2}{2} = -F_{fr} l_1 \\
0 - \frac{mv_2^2}{2} = -F_{fr} l_2
\end{cases}
$$

Решая, получим $l_2 = 4l_1$.

6. Абсолютно упругое соударение подразумевает выполнения закона сохранения механической энергии. Поэтому данная задача решается с использованием законов двух законов сохранения: импульса и энергии. Обозначим $\tilde{v}_1$ и $\tilde{v}_2$ скорости шаров после соударения.

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 \tilde{v}_1 + m_2 \tilde{v}_2 \\ m_1 \frac{v_1^2}{2} + m_2 \frac{v_2^2}{2} = m_1 \frac{\tilde{v}_1^2}{2} + m_2 \frac{\tilde{v}_2^2}{2} \end{cases}$$

Мы имеем систему из линейного и квадратного уравнения. Чтобы решить систему, соберем все слагаемые с m_1 в левой части, а с m_2 в правой.

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - \tilde{v}_1) = m_2 (\tilde{v}_2 - v_2) \\ m_1 (\frac{v_1^2}{2} - \frac{\tilde{v}_1^2}{2}) = m_2 (\frac{\tilde{v}_2^2}{2} - \frac{v_2^2}{2}) \end{cases}$$

Поделив почленно правые и левые части равенств получим систему из двух линейных уравнений. При этом мы исключаем тривиальный случай: $v_1 = \tilde{v}_1$ и $v_2 = \tilde{v}_2$.

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 \tilde{v}_1 + m_2 \tilde{v}_2 \\ v_1 + \tilde{v}_1 = v_2 + \tilde{v}_2 \end{cases}$$

Решая, получим выражения скоростей после соударения:

$$\tilde{v}_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$
$$\tilde{v}_2 = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Рассмотрим случай, когда $m_1 = m_2$. Тогда $\tilde{v}_1 = v_2$ и $\tilde{v}_2 = v_1$, то есть шары обменяются скоростями.

1.5 Гармонические колебания грузика на пружинке

Рассмотрим грузик массы m прикрепленный к стенке посредством пружины жесткости k. Если сместить грузик от положения равновесия, либо сообщить ему начальную скорость, то возникнут колебания. Воспользуемся вторым законом Ньютона (см. 1.7) для этого случая. В горизонтальном направлении на тело действует только сила упругости: $F_x = -k\Delta x$.

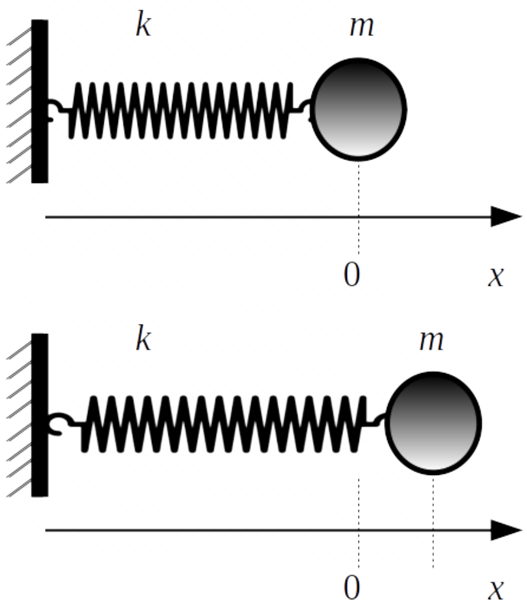


Рис. 1.3: Колебания грузика на пружинке.

Вертикально действующая сила тяжести скомпенсирована силой реакции опоры. Поэтому сразу запишем этот закон в проекции на горизонтальную ось x:

$$\begin{aligned} ma_x &= F_x \\ ma_x &= -k\Delta x \\ m\Delta\ddot{x} &= -k\Delta x \\ \Delta\ddot{x} + \frac{k}{m}\Delta x &= 0 \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что вторая производная координаты по времени равна проекции ускорения на ось x: $\Delta\ddot{x} = (\ddot{x} - \ddot{x}_0) = \ddot{x} = a_x$. Если для краткости смещение от положения равновесия обозначить следующим образом: $\Delta x = \xi$, то в этих обозначениях можно записать дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0, \tag{1.19}$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - циклическая частота собственных колебаний.

Решением этого уравнения является гармоническая функция времени t:

$$\xi = A\cos(\omega_0 t + \phi_0), \tag{1.20}$$

где A - амплитуда колебаний, ϕ_0 - начальная фаза колебаний. Согласно 1.2 проекция скорости на ось x:

$$v_x = \dot{\xi} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi_0) = -v_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0) \tag{1.21}$$

В процессе колебаний происходит превращение потенциальной энергии W_p деформированной пружины в кинетическую энергию грузика W_k и обратно. При этом полная энергия W остается неизменной:

$$W = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\dot{\xi}^2}{2} + \frac{k\xi^2}{2} \tag{1.22}$$

Глава 2

Молекулярная физика

2.1 Модель идеального газа

В разделе молекулярной физики часто встречаются задачи, в которых нужно описать состояние газа. Оно описывается с помощью макроскопических параметров давления p, объема V и температуры T. Состояние газов во многих случаях можно описать используя модель идеального газа. Напомним, что она подразумевает следующее:

- молекулы представляют из себя МТ, т.е. объемом молекул можно пренебречь

- мы также пренебрегаем взаимодействием молекул, т.е. не учитываем их взаимное притяжение и отталкивание

- полагаем, что молекулы абсолютно упруго соударяются между собой и со стенками сосуда.

Данные модельные представления позволяют применить законы динамики, рассмотренные в предыдущем разделе, к отдельным молекулам. После усреднения по большому числу молекул удается получить связь между микроскопическими параметрами, т.е. массой и скоростью отдельной молекулы, а также упомянутыми ранее макроскопическими.

2.2 Основное уравнение молекулярно- кинетической теории

Выведем основное уравнение молекулярно-кинетической теории, используя классические законы механики. Представим, что в сосуде, объемом

V, у нас находится N молекул идеального газа. Сначала рассмотрим абсолютно упругое столкновение отдельной молекулы массы m, с вертикальной стенкой сосуда. Пусть молекула подлетает к ней с некоторой средней скоростью $\vec{v}$ под некоторым углом. Ось x направим горизонтально и перпендикулярно к стенке. В результате абсолютно упругого соударения за время Δt импульс молекулы меняется на $|\Delta\vec{P}| = 2mv_x$. Запишем закон изменения импульса в проекции на ось x:

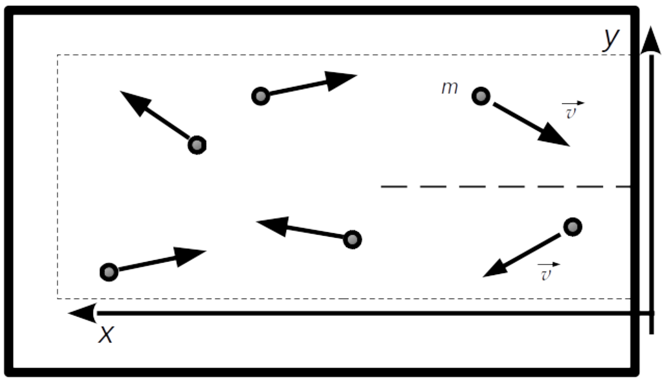


Рис. 2.1:

$$F_x = \frac{2mv_x}{\Delta t}. \tag{2.1}$$

Давление на стенку сосуда можно выразить, учитывая, что за время Δt до стенки долетит следующее количество молекул:

$$N_1 = \frac{N}{2V} v_x \Delta t S, \tag{2.2}$$

где S - площадь стенки сосуда. Здесь было учтено, что проекция скорости с равной вероятностью может иметь положительной или отрицательной. Тогда само давление выражается следующим образом:

$$p = \frac{N_1 F_x}{S} = \frac{N v_x \Delta t S 2mv_x}{2VS\Delta t} = nmv_x^2 \tag{2.3}$$

Отметим также, что в силу того, что проекции скорости на оси x, y и z равновероятны, можем, используя $v_x^2 = \frac{v^2}{3}$, записать:

$$p = \frac{nmv^2}{3} \tag{2.4}$$

Средняя кинетическая энергия движения молекул связана с абсолютной температурой T следующим образом:

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT, \tag{2.5}$$

Тогда окончательно получаем:

$$p = nkT \tag{2.6}$$

Отметим, что в системе СИ давление измеряется в паскалях (Па), а абсолютная температура в кельвинах (К).

Учитывая определение концентрации: $n = \frac{N}{V}$, придем к основному уравнению состояния идеального газа.

$$p = \frac{N}{V}kT$$
$$pV = \nu N_a kT$$
$$pV = \nu RT$$

2.3 Первое начало термодинамики

Энергия Q сообщаемая телу в виде теплоты, идет на изменение ΔU внутренней энергии этого тела и на совершении работы A над окружающими телами.

$$Q = A + \Delta U \tag{2.7}$$

Работа совершаемая газом с случае изобарного процесса определяется, как произведение давления на изменение объема $A = p\Delta V$.

В общем случае внутренняя энергия складывается из кинетической энергии молекул и их потенциальной энергии взаимодействия. В модели идеального газа не учитывается потенциальная энергия. Поэтому для ν молей идеального *одноатомного* газа внутренняя энергия равна $U = \frac{3}{2}\nu RT$, где R -универсальная газовая постоянная. Аналогично можно записать выражение для внутренней энергии *двухатомного* идеального газа $U = \frac{5}{2}\nu RT$.

Задачи

1. Рассчитайте объем V, занимаемым 1 молем идеального газа при нормальных условиях (p = 101,3 кПа, $t = 0°$C).

2. Определите отношение молярной теплоемкости при постоянном давлении C_p к молярной теплоемкости при постоянном объеме C_v.

Решения

1. Для ответа на вопрос задачи нам понадобится основное уравнение состояния идеального газа в виде:

$$V = \frac{\nu RT}{p}$$

Подстановка численных значений дает: $V = \frac{1 \cdot 8{,}31 \cdot 273}{1{,}01 \cdot 10^5} \approx 22,4$ л

2. По определению теплоемкости:

$$C_v = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_v$$
$$C_p = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_p$$

Согласно первому началу термодинамики 2.7 получим количество теплоты, необходимое сообщить одному молю идеального одноатомного газа при изохорном процессе, если температура газа увеличилась на ΔT:

$$\Delta Q_v = \frac{3}{2} R \Delta T$$

При изобарном процессе внутренняя энергия изменяется на такую же величина и дополнительно совершается работа:

$$\Delta Q_p = \frac{3}{2} R \Delta T + p \Delta V$$

Согласно основному уравнению состояния идеального газа:

$$p \Delta V = R \Delta T$$

Окончательно получаем:

$$C_v = \frac{3}{2} R$$
$$C_p = \frac{5}{2} R$$

Для отношения получим:

$$\frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$$

Глава 3

Электричество и магнетизм

3.1 Электростатика

В данном разделе изучаются электрические поля, которые создают неподвижные электрические заряды. В системе СИ заряды измеряются в кулонах (Кл). Интерес для изучения представляют силовые и энергетические характеристики поля, такие как напряженность и потенциал. О том, как они определяются и в каких единицах измеряются, речь пойдет дальше.

3.1.1 Закон Кулона

Сперва рассмотрим два точечных неподвижных электрических заряда q_1 и q_2. Закон Кулона устанавливает силу взаимодействия между ними. Она пропорциональна произведению этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними. Эта сила действует вдоль линии, соединяющей эти заряды. Разноименные заряды притягиваются, а одноименные отталкиваются.

$$\vec{F}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \tag{3.1}$$

3.1.2 Напряженность электрического поля

Напряженность электрического поля ($\vec{E}$) - силовая характеристика поля, которая равна отношению силы, действующей на пробный заряд q_{pr} к величине этого заряда. Она, как и сила, является векторной величиной.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{pr}} \tag{3.2}$$

Следует отметить, что величина пробного заряда должна быть малой, чтобы не искажать существующей картины силового поля. Для наглядного описания такой картины используются силовые линии. Касательные к этим линиям указывают направление вектора напряженности, а густота качественно показывает где напряженность больше, а где меньше. Поле называется однородным, если силовые линии представляют собой параллельные линии, расположенные на равном расстоянии друг от друга. Точечный заряд создаёт неоднородное поле, силовые линии, которого являются радиальными.

На рис. 3.1 изображены силовые линии для двух точечных разноименных зарядов, но одинаковых по модулю. Следует отметить, что си-

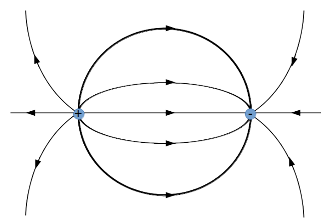


Рис. 3.1: Картина силовых линий для разноименных зарядов.

ловые линии поля, создаваемого статическими зарядами имеют своё начало и конец. Линии начинаются на положительных зарядах, а заканчиваются на отрицательных. Иногда, как на приведенном рисунке, линии уходят на бесконечность, и возвращаясь с бесконечности, замыкаются на отрицательном заряде. В случае двух одноименных одинаковых заря-

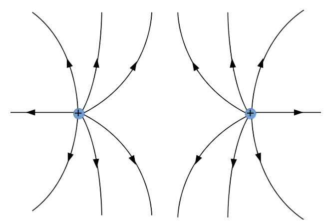


Рис. 3.2: Картина силовых линий для разноименных зарядов.

дов (см. рис.3.2) картина силовых линий выглядит иначе: линии уходят на бесконечность и там заканчиваются. Точно посередине между двумя одинаковыми зарядами напряженность поля равна нулю, поэтому в центре такого поля силовые линии имеют меньшую плотность. Анализируя описанные случаи можно понять, что в данных примерах напряженность в разных точках пространства различна.

Если напряженность во всех точках одинакова, то, как было отмечено выше, такое является поле называется однородным. Далее этот случай будет рассмотрен подробнее.

3.1.3 Потенциальная энергия. Потенциал

Потенциальная энергия была определена в разделе 1.4. В электростатике речь обычно идет о потенциальной энергии электостатического поля. Найдем потенциальную энергию взаимодействия W_p двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии R друг от друга. Для этого воспользуемся определениями 1.14 и 1.15. Для этого посчитаем работу по перемещению q_2 в поле q_1 на бесконечность.

$$\begin{aligned} A &= \int_R^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{R} \\ A &= W_1 - W_2 \end{aligned}$$

Удобно на бесконечности положить потенциальную энергию равной нулю. При такой нормировке потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии R друг от друга:

$$W_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{R}$$

Аналогично тому, как ранее была введена силовая характеристика поля - напряженность, введем энергетическую характеристику - потенциал. Эта величина является отношением потенциальной энергии пробного заряда q_{pr} в электрическом поле к величине этого заряда. Напомним, что пробный заряд должен быть мал, чтобы не искажать существующую картину силовых линий.

$$\phi = \frac{W_p}{q_{pr}} \tag{3.3}$$

Поскольку, как было отмечено ранее, потенциал определен с точностью до постоянной величины, то физический смысл имеет разность потенциалов:

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{W_1}{q_{pr}} - \frac{W_2}{q_{pr}} = \frac{A}{q_{pr}}$$

Поэтому, работа электрических сил по перемещению заряда из точки 1 в точку 2 равна произведению заряда на разность потенциалов. $\phi_1 - \phi_2$ ещё называют напряжением между точками 1 и 2 и обозначают U.

Единицы измерения - вольты (В). Окончательно получим связь между работой электрических сил и напряжением:

$$A = qU \tag{3.4}$$

Из данного определения следует, что произведение заряда на напряжение дает работу. Теперь становится понятным, почему такая внесистемная единица, как электронвольт (эВ) используется для измерения работы, совершаемой элементарными частицами, например электронами. Эта единица измерения применяется в атомной физике и химии.

3.1.4 Электроёмкость. Конденсаторы

Если взять два проводника и сообщить им разноименные заряды, то в окружающем их пространстве возникнет электрическое поле. Говорят, что в таком случае мы имеем дело с электрическим конденсатором. Это слово имеет латинский корень, и оно означает, что-то сгущается или накапливается. В данном случае речь идет о накоплении энергии. Проводники, которым сообщают заряд, называются обкладками конденсатора. Электроёмкость C - это величина равная отношению заряда на обкладках к напряжению U между ними:

$$C = \frac{q}{U} \tag{3.5}$$

Рассмотрим плоский конденсатор, т.е. когда обкладки представляют из себя плоские пластины. Если заряд на них распределен равномерно, то электрическое поле в пространстве между обкладками можно считать однородным. Конечно же вблизи границ обкладок приходится учитывать краевые эффекты. Другими словами - это отклонения от однородности, когда силовые линии искажаются. По этой причине часто делается оговорка, что линейные размеры обкладок плоского конденсатора много больше расстояния d между ними.

Ёмкость плоского конденсатора равна:

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}, \tag{3.6}$$

где S - площадь пластин.

Найдем связь между модулем вектора напряженности $|\vec{E}|$ и напряжением U для однородного поля. Будем перемещать заряд q вдоль силовых линий. Тогда угол между векторами напряженности и вектором

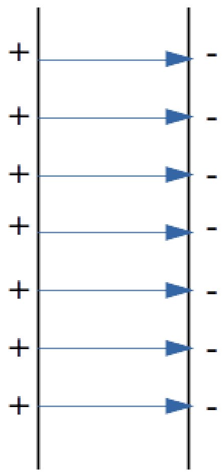


Рис. 3.3: Картина силовых линий однородного электрического поля между обкладками плоского конденсатора.

элементарного перемещения $\vec{dr}$ будет равен 0. Согласно определению механической работы 1.14 и определению напряженности 3.2 запишем:

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q|\vec{E}||\vec{dr}|\cos 0 = qEd,$$

где d - расстояние между точками 1 и 2. Эти точки могут находится на обкладках, тогда d - расстояние между обкладками. Учитывая 3.4, получаем искомую связь между $|\vec{E}|$ и U, справедливую для однородного поля:

$$U = Ed$$

Это соотношение помогает представить, почему в системе СИ единицей измерения напряженности электрического поля является В/м.

В пространстве между обкладками плоского конденсатора напряженность в два раза больше, чем создает только одна обкладка. Учитывая это обстоятельство, рассчитаем работу по перемещению одной из пластин в поле другой на расстояние d:

$$A = qU = -q\frac{E}{2}d = -\frac{qU}{2}$$

Учитывая 1.15, получим для энергии заряженного конденсатора:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} \tag{3.7}$$

Конденсаторы находят широкое применение в электротехнике: от устройств накопления энергии до элементов на которых реализована оперативная память в компьютерах.

Рассмотрим параллельное и последовательное соединение конденсаторов. В первом случае, т.е. при параллельном соединении, на конденса-

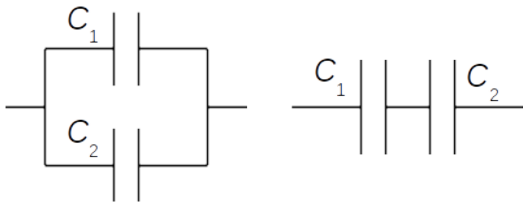


Рис. 3.4: Параллельное и последовательное соединение конденсаторов.

торах одинаковое напряжение, а заряды суммируются. Во втором случае наоборот: суммируются напряжения, а заряды на обкладках равны по модулю. Поэтому общая емкость при параллельном соединении C_p:

$$q = q_1 + q_2 = C_1U + C_2U = (C_1 + C_2)U$$
$$q = C_pU$$
$$C_p = C_1 + C_2$$

Аналогично для емкости последовательного соединения C_s:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$
$$U = \frac{q}{C_s}$$
$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Задачи

1. Два отрицательных точечных заряда q_1 = -9 нКл и q_2 = -36 нКл расположены на расстоянии $r = 3$ м друг от друга. Когда в некоторой точке поместили заряд q_0, то все три заряда оказались в равновесии. Найти заряд q_0 и расстояние между зарядами q_1 и q_0.

2. Одинаковые по модулю, но разные по знаку заряды q = 18 нКл, расположенный в двух вершинах при основании $a = 0{,}2$ м равнобедренного треугольника. Найти напряженность $\vec{E}$ в третьей вершине, если боковые стороны равны а) $\frac{1}{\sqrt{3}}a$ б) $\frac{1}{\sqrt{2}}a$ в) a.

3. Электрон, пролетая в электрическом поле путь от точки 1 к точке 2, увеличил свою скорость с $v_1 = 10^6$ м/с до $v_2 = 3 \cdot 10^6$ м/с. Найти разность потенциалов между точками 1 и 2 электрического поля.

4. Какой заряд протечет по проводам, соединяющего обкладки плоского воздушного конденсатора и источник тока с напряжением $U = 6$ В, при погружении конденсатора в керосин. Диэлектрическая проницаемость керосина $\epsilon = 2$, площадь пластин $S = 180$ см^2, расстояние между пластинами $d = 2$ мм.

Решения

1. Расположим заряд q_0 между зарядами q_1 и q_2. В этом случае силы, действующие на заряд между ними, противоположно направлены. Обозначим расстояние между зарядами q_1 и q_0 как x. Запишем равенство сил по модулю:

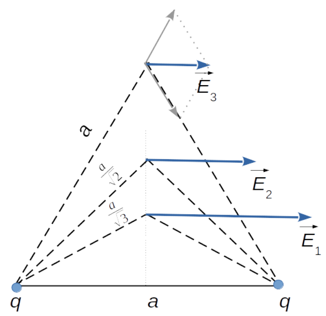
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_0}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 q_0}{(r-x)^2}$$
$$(r-x)^2 = \frac{q_2}{q_1} x^2$$

Подставляя численные значения, решим квадратное уравнение:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Получим два решения: $x_1 = 1$ м и $x_2 = -3$ м. Второй ответ соответствует случаю, когда модули сил равны, но направлены в одну сторону, поэтому он не удовлетворяет условию задачи.

2. Для нахождения напряженности в трех точках, построим соответствующие равнобедренные треугольники. Результирующая напря-



женность в каждом из трех случаев складывается из суммы двух векторов, которые равны друг другу по модулю, но направлены вдоль боковых сторон равнобедренных треугольников. В случае 1) угол α при основании равен $30°$, в случае 2) $45°$, а в 3) $60°$. Тогда, воспользовавшись правилом параллелограмма для сложения векторов, получим:

$$E_i = 2\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a_i^2}\cos\alpha_i, i = 1, 2, 3$$

Подставляя расстояния и значения углов:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{3\sqrt{3}q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \\ E_2 &= \frac{2\sqrt{2}q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \\ E_3 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \end{aligned}$$

3. Данную задачу можно решать, используя закон сохранения полной механической энергии 1.18:

$$\begin{aligned} \frac{mv_1^2}{2} + e\phi_1 &= \frac{mv_2^2}{2} + e\phi_2 \\ e(\phi_1 - \phi_2) &= \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \\ \phi_1 - \phi_2 &= \frac{m}{2e}(v_2^2 - v_1^2) \end{aligned}$$

4. Выразим заряд на обкладках до и после погружения

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 U \\ q_2 &= C_2 U \\ \Delta q = q_2 - q_1 &= (C_2 - C_1)U = (\epsilon - 1)\frac{\epsilon_0 S}{d}U \end{aligned}$$

3.2 Постоянный электрический ток

Электрический ток - это упорядоченное движение носителей заряда. Помимо этого, носители заряда участвуют ещё и в тепловом движении. В отличии от электростатики, при протекании тока есть электрическое поле внутри проводника. Оно и обеспечивает упорядоченное движение. Сила электрического тока определяется, как отношение заряда Δq, протекшего через проводник за интервал времени Δt. Если устремить интервал времени к нулю, то придем к определению силы тока через производную:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \dot{q} \tag{3.8}$$

Сила тока является скалярной величиной, и может быть положительной и отрицательной. Единицы измерения амперы (А).

Введем ещё понятие плотности электрического тока $\vec{j}$. Модуль этой величины есть отношение силы тока ΔI, протекающего через малую площадь, к величине этой площади ΔS.

$$|\vec{j}| = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \tag{3.9}$$

Это уже векторная величина, которая направлена вдоль скорости упорядоченного движения носителей заряда. Основная единица измерения А/м^2.

На примере цилиндрического проводника, в котором создано однородное электрическое поле, найдем связь между плотностью тока и скоростью упорядоченного движения носителей заряда u. Выразим заряд Δq, который оказался в объеме проводника ΔV через элементарный заряд e и количество заряженных частиц N. В случае металла носителями заряда являются электроны. Обозначим концентрацию электронов в металле n. Тогда: $N = n\Delta V$, а $\Delta q = en\Delta V$. Для плотности тока:

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{\Delta q}{\Delta S \Delta t} = \frac{en\Delta V}{\Delta S \Delta t} = enu$$

3.2.1 Закон Ома

Для участка проводника сформулируем закон Ома: *отношение напряжение U к силе тока I является постоянной величиной и называется сопротивлением R.*

$$R = \frac{U}{I} \tag{3.10}$$

В системе СИ сопротивление измеряется в омах (Ом). Сопротивление однородного проводника постоянного сечения, например цилиндрического провода, зависит от его длины l и площади поперечного сечения S следующим образом:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \tag{3.11}$$

где ρ - удельное сопротивление материала. Оно измеряется в Ом·м. Эта величина для металлов линейно растет с увеличением температуры t по следующему закону:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \tag{3.12}$$

где ρ_0 - удельное сопротивление при 0°C, α - температурный коэффициент сопротивления.

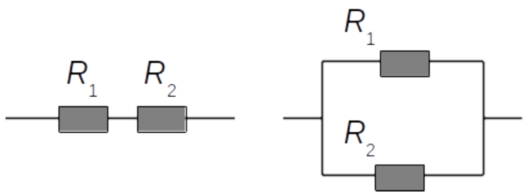


Рис. 3.5: Последовательное и параллельное соединение сопротивлений.

Аналогично тому, как ранее было рассмотрено последовательное и параллельное соединение конденсаторов, рассмотрим соединения сопротивлений. При параллельном соединении, на сопротивлениях одинаковое напряжение, а токи суммируются. При последовательном, наоборот: ток одинаков, а напряжения суммируются. При последовательном соединении сопротивление R_s:

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 = R_1 I + R_2 U = (R_1 + R_2)I \\ U &= R_s I \\ R_s &= R_1 + R_2 \end{aligned}$$

При параллельном сопротивление R_p:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \\ I &= \frac{U}{R_s} \\ \frac{1}{R_s} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{aligned}$$

3.2.2 Электродвижущая сила

Для поддержания постоянного тока необходимо наличие источника, в котором сторонние силы будут разделять заряды. В противном случае произойдет такая ситуация, как при замыкании пластин конденсатора: с положительно заряженной обкладки заряд перетечет на отрицательно заряженную, в результате обкладки станут нейтральными, и поле в пространстве между ними исчезнет. Работу по разделению заряда A_{ext} совершают не кулоновские, а сторонние силы, например, имеющие химическую природу. Отношение этой работы к величине заряда называется электродвижущей силой (ЭДС):

$$\mathcal{E} = \frac{A_{ext}}{q} \tag{3.13}$$

Закон Ома для полной цепи связывает ЭДС, силу тока и полное сопротивление:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}, \tag{3.14}$$

где r - внутреннее сопротивление источника.

3.2.3 Закон Джоуля-Ленца

Согласно закону Джоуля-Ленца, в проводнике выделяется тепло, которое равно работе электрических сил по перемещению заряда в поле:

$$Q = A = \Delta q U = I U \Delta t \tag{3.15}$$

Используя закон Ома для участка цепи 3.10, получим:

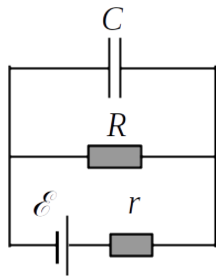
$$Q = I U \Delta t = I^2 R \Delta t = \frac{U^2}{R} \Delta t \tag{3.16}$$

Задачи

1. Найти сопротивление R биметаллического (железо-медь) провода длины $l = 100$ м. Диаметр внутренней железной части $d = 2$ мм, общий диаметр $D = 5$ мм. Удельное сопротивление железа $\rho_1 =$ 0,120 мкОм·м и меди $\rho_2 =$ 0,017 мкОм·м.

2. Какова должна быть ЭДС источника тока в схеме, изображенной на рис., чтобы напряженность электрического поля в плоском конденсаторе была $E =$ 2,25 кВ/м. Внутреннее сопротивление $r =$ 0,5 Ом, сопротивление резистора $R =$ 4,5 Ом, расстояние между пластинами конденсатора $d =$ 0,2 см.

Решение



1. Сперва найдем сопротивления проводников R_1 и R_2. Сразу выразим площади $S_1 = \frac{\pi d^2}{4}$ и $S_2 = \frac{\pi(D^2-d^2)}{4}$. И согласно правилу для параллельного соединения:

$$R_1 = \frac{\rho_1 l}{S_1}$$
$$R_2 = \frac{\rho_2 l}{S_2}$$
$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\rho_1 \rho_2 l}{\rho_1 S_2 + \rho_2 S_1}$$

2. Напряжение на конденсаторе равно напряжению на резисторе, т.к. они соединены параллельно. Силу тока в цепи выразим по закону Ома для полной цепи (см.3.14).

$$U_C = U_R$$
$$Ed = IR$$
$$\mathcal{E} = \frac{Ed(R+r)}{R} = 5B.$$

3.3 Магнетизм

Вокруг проводников с током существует магнитное поле. Мы будем его описывать силовой величиной - индукцией $\vec{B}$. В системе СИ эта величина измеряется в теслах (Тл). Аналогично тому, как мы использовали понятие силовых линий для электрического поля, применим такое наглядное представление и для магнитного поля. В отличие от электростатического поля, линии магнитного поля всегда замкнуты сами на себя, т.е. у них нет ни начала, ни конца.

3.3.1 Силы в магнитном поле

Известно, что на проводники помещенные в магнитное поле, действует сила Ампера $\vec{F}_A$. Для однородного магнитного поля и прямолинейного проводника справедливо выражение:

$$\vec{F}_A = I[\vec{l}\vec{B}] \tag{3.17}$$

Модуль векторного произведения равен произведению модулей на синус угла между векторами:

$$|\vec{F}_A| = I|\vec{l}||\vec{B}|\sin(\alpha)$$

Вектор силы $\vec{F}_A$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора $\vec{l}$ и $\vec{B}$. Вдоль нормали возможны два взаимно противоположных направления. Правильное можно определить по правилу правого винта (буравчика). Либо воспользоваться правилом левой руки, которое позволит сразу определить плоскость и направление вдоль нормали.

На отдельную заряженную частицу в магнитном поле действует сила Лоренца:

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}\vec{B}] \tag{3.18}$$

Аналогично тому, как поступили ранее, выразим модуль:

$$\vec{F}_L = q|\vec{v}||\vec{B}|\sin(\alpha) \tag{3.19}$$

и определим направление одним из двух описанных способов.

3.3.2 Магнитный поток

Магнитный поток Φ показывает насколько густо поверхность пронизана силовыми линиями. Это понятие применимо и для электрического поля, и для некоторых других векторных полей, но мы будем его использовать только для магнитного.

$$\Phi = \int_S (\vec{B}\vec{n})dS, \tag{3.20}$$

где $\vec{n}$ - нормаль к бесконечно малой поверхности dS. Очевидно, что поток скалярная величина. Она измеряется в веберах (Вб).

В случае однородного поля и плоской поверхности выражение 3.20 принимает более простой вид:

$$\Phi = |\vec{B}|S\cos(\alpha)$$

Электрический ток порождает магнитное поле, которое пропорционально силе тока. Таким образом, и магнитный поток пропорционален этой величине:

$$\Phi = LI, \tag{3.21}$$

где L - это индуктивность, которая измеряется в генри (Гн).

Однородное магнитное поле может быть создано внутри очень длинной катушки. Энергия магнитного поля, которая запасена в катушке дается выражением:

$$W = \frac{\Phi I}{2} = \frac{\Phi^2}{2L} = \frac{LI^2}{2} \tag{3.22}$$

3.3.3 Закон электромагнитной индукции

Согласно закону электромагнитной индукции, открытого Майклом Фарадеем в 1831 году, при изменении магнитного потока в контуре возникает ЭДС. Она называется ЭДС индукции.

$$\mathcal{E}_{ind} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\dot{\Phi} == -L\frac{dI}{dt} \tag{3.23}$$

Математическую формулировку можно изложить следующим образом: ЭДС индукции равна производной магнитного потока по времени, взятой с обратным знаком.

Задачи

1. Заряженная частица массы m с положительным электрическим зарядом q влетает в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Вектор скорости частицы перпендикулярен линиям магнитного поля ($\vec{v} \perp \vec{B}$). Найти радиус окружности R по которой будет двигаться частица.

2. Проводящий виток площади $S = 2$ см^2 расположен перпендикулярно к линиям индукции однородного магнитного поля. Найти индуцируемую в витке ЭДС, если за время $\Delta t = 0{,}05$ с магнитная индукция равномерно убывает от $B_1 = 0{,}5$ Тл до $B_2 = 0{,}1$ Тл.

Решения

1. В магнитном поле на частицу действует сила Лоренца: $\vec{F}_L = q[\vec{v}\vec{B}]$. Другие силы, такие, как сила тяжести, в данном случае можно

не учитывать. На частицу действует сила, которая определяет направление ускорения. Сила, а вместе с ней и ускорение, перпендикулярны скорости, поэтому траекторией движения будет окружность (см. задачу 2 из раздела "Кинематика"). Поскольку скорость векторная величина, а движение по окружности радиуса R сопровождается изменением направления вектора скорости $\vec{v}$, то следовательно, частица имеет ускорение. Оно называется центростремительным, т.к. направлено к центру окружности. Модуль его равен:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Тогда, по 2-ому закону Ньютона, и учитывая, что модуль векторного произведения равен произведению модулей векторов на синус угла между ними, получаем:

$$\begin{aligned} ma_n &= qvB \\ m\frac{v^2}{R} &= qvB \\ R &= \frac{mv}{qB} \end{aligned}$$

2. Воспользуемся определением магнитного потока и законом электромагнитной индукции (см. 3.20 и 3.23). Учитывая то, что поле однородно и перпендикулярно поверхности, поток через виток рассчитывается: $\Phi = BS$. А поскольку поле убывает равномерно, то нам не придется рассматривать предел отношения изменения потока к изменению времени.

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{(B_2 - B_1)S}{\Delta t} = 1,6\text{мВ}$$

3.4 Колебания в электрическом контуре

Если соединить конденсатор и катушку индуктивности параллельно, то в таком контуре могут возникнуть электрические колебания. Воспользуемся законом Ома для такого контура:

$$\begin{aligned} U_C &= \mathcal{E}_{ind} \\ \frac{q}{C} &= -L\frac{dI}{dt} \\ \ddot{q} + \frac{1}{LC}q &= 0 \end{aligned}$$

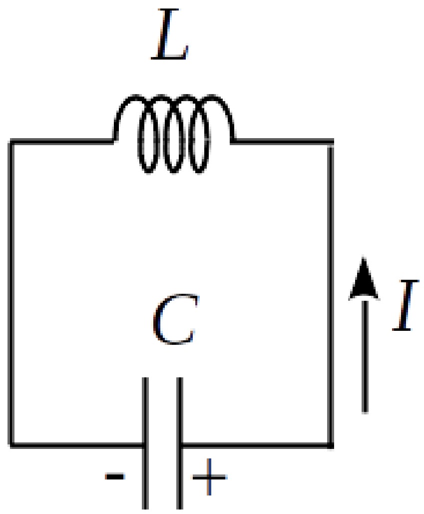


Рис. 3.6: Колебания в электрическом контуре.

Аналогично 1.19 мы пришли к уравнению гармонических колебаний, где в качестве переменной используется заряд q. Циклическая частота собственных колебаний в данном случае равна $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. Решение этого уравнения:

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

Согласно определению силы тока 3.8:

$$I = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0)$$

Энергия запасенная в контуре:

$$W = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} \tag{3.24}$$

Глава 4

Геометрическая оптика

Свет имеет как волновую, так и корпускулярную природу. Но в ряде случаев можно подойти формально к описанию распространения света: считать, что внутри однородной среды свет распространяется прямолинейно. Преломление, т.е. отклонение от первоначального направления, может происходить только на границе раздела сред. Поэтому в разделе геометрическая оптика достаточно сформулировать следующие законы.

4.1 Законы отражения и преломления

Угол α между падающим лучом и нормалью называется углом падения. Угол β между нормалью и отраженным лучом называется углом падения. Луч падающий, нормаль к поверхности, восстановленная в точке падения, и отраженный луч лежат в одной плоскости. Угол падения равен углу отражения (см. рис. 4.1).

Луч падающий, преломленный и нормалью, восстановленной в точке падения лежат в одной плоскости. Угол падения α и угол преломления γ связаны следующим соотношением:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1} \tag{4.1}$$

4.2 Полное внутренне отражение

Если луч света падает на границу раздела двух сред со стороны оптически более плотной, то возможна ситуация, когда нет преломленного луча, а есть только отраженный. Если луч света распространяется в воде и падает на границу раздела с воздухом, то для угла полного внутреннего

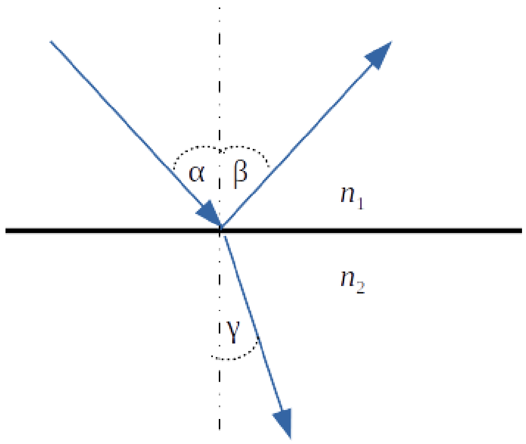


Рис. 4.1: Иллюстрация законов отражения и преломления.

отражения условие выглядит следующим образом:

$$\sin\gamma = \frac{1}{n_2} \tag{4.2}$$

4.3 Формула тонкой линзы

Прозрачное тело, ограниченное сферическими поверхностями, называют линзой. Линзы обладают таким свойством, что они могут собирать или рассеивать свет. Рассмотрим стеклянные линзы, находящиеся в воздушной среде. Тогда, если поверхности линзы выпуклые с двух, либо с одной стороны, то она собирающая. Если же поверхности вогнутые, то она рассеивающая. На рис. 4.2 слева схематически изображена собирающая линза. Пунктирная линия OO' - это главная оптическая ось, которая проходит через центр линзы. Параллельный пучок лучей, падающий на эту линзу вдоль главной оптической оси, собирается в точке F, которая называется фокусом.

Для рассеивающей линзы (справа на рис. 4.2) лучи расходятся, а их продолжения собираются в точке, которая называется мнимым фокусом.

Собирающая линза в большинстве случаев даёт действительные изображения, т.е. такие, которые можно увидеть, разместив экран. Рассеивающая же даёт только мнимые изображения.

Формула тонкой линзы связывает расстояние от предмета до линзы d, расстояние от линзы до изображения f и фокусное расстояние F:

$$\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \pm\frac{1}{F} \tag{4.3}$$

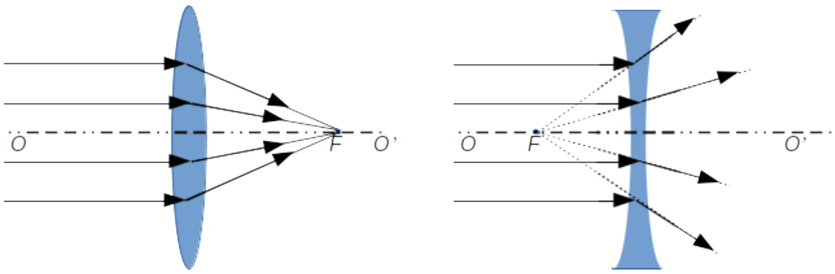


Рис. 4.2: Собирающая (слева) и рассеивающая (справа) линзы.

Знак минус перед вторым слагаемым в левой части ставится, если изображение мнимое, а в правой части знак минус ставится, если фокус мнимый, то есть когда формула применяется для рассеивающей линзы.

Задачи

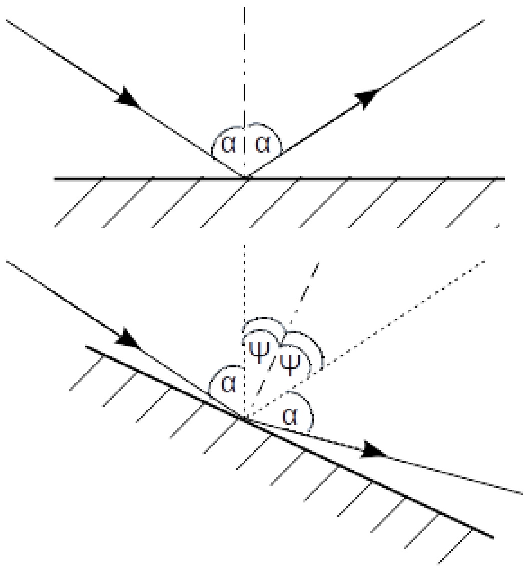
1. Плоское зеркало поворачивают на угол $\Psi = 25°$. На какой угол повернется отраженный от зеркала луч?

2. Луч света падает перпендикулярно к боковой поверхности призмы, преломляющий угол которой $\phi = 30°$. Найти угол отклонения θ луча от первоначального направления после выхода из призмы. Показатель преломления призмы $n = 1{,}4$.

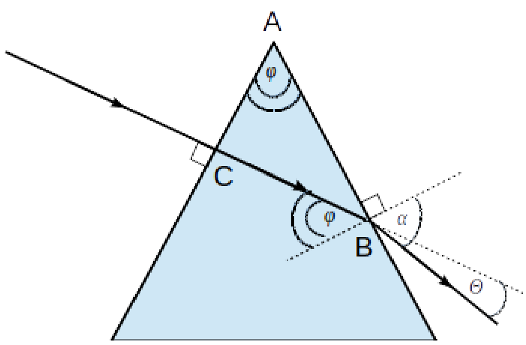
3. Освещенная щель высоты $h = 5$ см проектируется с помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см на экран, отстоящей от линзы на расстоянии $f = 12$ см. Найти высоту H изображения щели на экране.

Решения

1. Из приведенного рисунка видно, что после поворота зеркала новый угол падения равен $\alpha + \Psi$. Угол между вертикалью и отраженным лучом после поворота зеркала равен $\alpha + 2\Psi$. Следовательно, отраженный луч повернется на угол: $\alpha + 2\Psi - \alpha = 2\Psi = 50°$



2. Рассмотрим ход луча света: на первую границу раздела он падает перпендикулярно, поэтому прошедший луч не преломляется. На второй границе раздела применим закон преломления 4.1, учитывая, что призму окружает воздух с показателем преломления $n_1 = 1$. Из прямоугольного треугольника ABC следует, что $\angle B = \frac{\pi}{2} - \phi$. Следовательно, угол падения равен $\phi = 30°$. Искомый угол отклонения $\theta = \alpha - \phi$ Поэтому окончательно:



$$\theta = \arcsin(n \sin\phi) - \phi = \arcsin(1,4 \cdot 0,5) - 30° \approx 14°$$

3. Для решения воспользуемся формулой тонкой линзы 4.3 и подобием треугольников ABO и A_1B_1O.

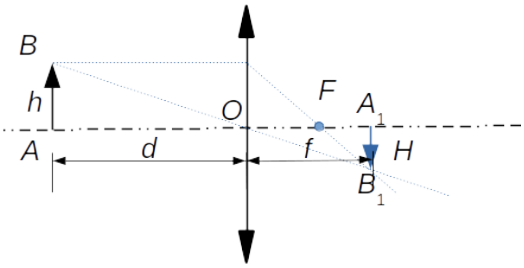


Рис. 4.3: Построение действительного изображения в собирающей линзе.

$$\begin{cases} \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \\ \frac{h}{H} = \frac{d}{F} \end{cases}$$

Из этих двух уравнений выражаем $H = \frac{h}{F}(f - F) = 1$ см.