4 ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИТЕЛ ПРОСТОЙ ФОРМЫ

Цель работы

Экспериментальное определение моментов инерции тел простой формы.

Идея эксперимента

Идея эксперимента состоит в использовании связи между периодом колебаний крутильного маятника и его моментом инерции. Исследуемое тело является составной частью крутильного маятника. Измерения периода колебаний маятника дают возможность найти коэффициент жёсткости пружины и моменты инерции исследуемых тел.

Теоретическое введение

В данной задаче для определения моментов инерции различных тел и проверки теоремы Гюйгенса – Штейнера используется механическая система, совершающая вращательные колебания.

Для анализа **вращательного движения** твёрдого тела используются следующие понятия:

- *Момент силы* $\vec{F}$ *относительно точки* пространства O:

$$\vec{N} = [r, \vec{F}], \tag{4.1}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор проведенный из точки O в точку приложения силы $\vec{F}$.

- *Момент импульса материальной точки относительно точки* O:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{V}]. \tag{4.2}$$

- *Момент импульса твёрдого тела относительно точки* O:

$$\vec{M}=\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i,\vec{p}_i]=\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i,\Delta m_i\vec{V}_i],\qquad(4.3)$$

где $\vec{r}_i$ – радиус вектор i-го малого элемента твёрдого тела массой Δm_i, проведённый из точки O.

○ *При анализе динамики вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси векторы моментов сил* $\vec{N}^{внеш}$ *и импульса* $\vec{M}$ *удобно спроецировать на ось вращения Z, содержащую точку O.* В нашем случае ось Z – это ось, вокруг которой совершает вращательные колебания экспериментальная колебательная система. Указанные проекции называют ***осевыми моментами***. Это позволяет записать **уравнение моментов***) в скалярной форме:

$$\frac{dM_z}{dt}=\sum_{i=1}^{n}N_{zi}^{внеш}.\qquad(4.4)$$

Можно показать, что проекция момента импульса твёрдого тела на ось Z **пропорциональна угловой скорости вращения тела** $\boldsymbol{\omega}$. А именно, она равна

$$M_z=\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i R_i^2\right)\cdot\omega\quad\text{или}\quad M_z=I_z\cdot\omega.\qquad(4.5)$$

Здесь обозначение I_z – использовано для ***момента инерции твёрдого тела*** относительно оси Z. Как видим, он равен сумме моментов инерции малых элементов, составляющих твёрдое тело:

$$I_z=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i R_i^2.\qquad(4.6)$$

где R_i – расстояние от i – ого элемента до оси Z.

С учётом этого равенство (4.4) приобретает вид ***уравнения***

---

*) В общем случае уравнение моментов для системы материальных точек имеет векторный характер.

динамики вращательного движения твёрдого тела :

$$I_z \cdot \beta = \sum_{i=1}^{n} N_{zi}^{внеш} \quad . \tag{4.7}$$

Здесь $\beta = \dot{\omega} = \dfrac{d\omega}{dt}$ – проекция углового ускорения. Записанный закон является аналогом второго закона Ньютона $\left(m \cdot \vec{a}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{внеш} \right)$, но для вращательного движения твёрдого тела. Таким образом, ***при анализе вращательного движения мерой инерции твёрдого тела служит его момент инерции*** относительно оси вращения.

В ряде случаев для вычисления моментов инерции тел оказывается полезной **теорема Гюйгенса–Штейнера** (теорема о параллельных осях):

- ***Если известен момент инерции твёрдого тела относительно оси, проходящей через его центр масс I_c, то момент инерции относительно любой оси Z параллельной данной равен***

$$\boldsymbol{I_z = I_c + mb^2}, \tag{4.8}$$

где b – расстояние между осями, m – масса тела.

Крутильный маятник. Метод колебаний

Метод колебаний – это метод, позволяющий экспериментально определить момент инерции твёрдого тела I_z (подвижной части колебательной системы), по результатам измерения периода его вращательных колебаний T относительно некоторой неподвижной оси Z под действием

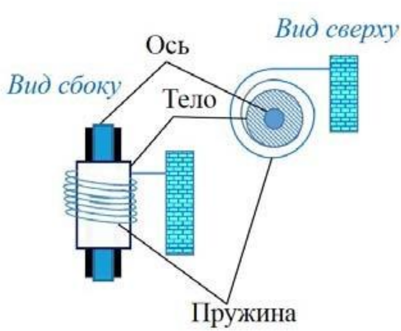

Рис. 4.1. Упругий подвес маятника

спиральной пружины (рис. 4.1).

Для произвольного углового смещения системы α из положения равновесия (когда пружина не деформирована) в соответствии с законом Гука на шкив будет действовать возвращающий момент сил, проекция которого на ось Z равна:

$$N_z = -D \cdot \alpha, \tag{4.9}$$

где D – *модуль кручения* пружины. Знак минус соответствует разным знакам проекций углового смещения α и момента сил упругости на ось Z в любой момент времени. Если пренебречь моментами сил трения, то основное уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела (4.7) с учётом (4.9) приобретает вид:

$$I_z \cdot \beta_z = -D \cdot \alpha. \tag{4.10}$$

Поскольку угловое ускорение равно второй производной углового смещения $\beta_z = \dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$, получаем отсюда дифференциальное уравнение для угла поворота системы α:

$$I_z \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} + D \cdot \alpha = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{D}{I_z} \cdot \alpha = 0 \tag{4.11}$$

Это уравнение свободных гармонических колебаний с частотой, равной:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I_z}} \text{ и периодом } T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{D}}. \tag{4.12}$$

Рассмотрим колебания крутильного маятника, в состав которого входят два одинаковых груза, закрепленных на стержне на одинаковых расстояниях b от оси вращения. Полный момент инерции маятника с учётом утверждения теоремы Гюйгенса–Штейнера равен:

$$I_z = I_0 + I_c + 2m_{гр}b^2 + 2I_{гр}, \tag{4.13}$$

где I_0 – момент инерции той части маятника, на которой крепятся все остальные элементы кроме грузов; $I_с$ и $I_{гр}$ – моменты инерции стержня и груза относительно осей, проходящих через их центра масс; $m_{гр}$ –масса каждого груза. С учётом (4.12) период колебаний равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_c + 2m_{гр}b^2 + 2I_{гр}}{D}}\,. \tag{4.14}$$

Если возвести это равенство в квадрат, то мы увидим, что квадрат периода колебаний линейно зависит от квадрата расстояния b:

$$T^2 = 4\pi^2\left(\frac{I_0 + I_c + 2I_{гр}}{D}\right) + \frac{8\pi^2 m_{гр}}{D}\cdot b^2\,. \tag{4.15}$$

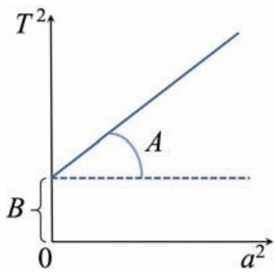

Рис. 4.2. Зависимость T^2 от a^2.

На рис. 4.2 эта зависимость представлена графически. Используя построенную по результатам эксперимента зависимость, по тангенсу угла её наклона (коэффициент A) можно определить модуль кручения пружины D.

Если вместо стержня с грузами в состав маятника включить тело с неизвестным моментом инерции I_x, то период колебаний такого маятника будет равен

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_x}{D}}\,, \tag{4.16}$$

откуда

$$I_x = \frac{T_1^2 D}{4\pi^2} - I_0\,. \tag{4.17}$$

Экспериментальная установка

Установка (рис. 4.3) состоит из крутильного *маятника* 1 на *основании* 2, *рамки с фотоэлементами* 3, *цифрового счетчика* 4 и *набора образцов,* для которых производят измерения моментов инерции. В наборе съёмных образцов имеются стержень с цилиндрическими грузами, цилиндр, шар и диски. На рис. 4.3 показан стержень с *цилиндрическими грузами* 5. Образцы крепятся на вертикальной оси маятника. Крутильный маятник может вращаться вокруг этой вертикальной оси. Пружина маятника изготовлена из упругой стальной проволоки.

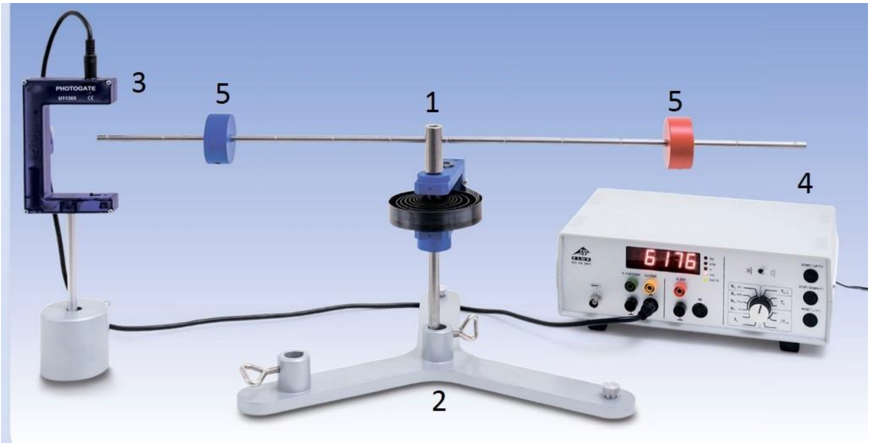

Рис. 4.3. Экспериментальная установка.

Система измерения времени включает в себя рамку с фотоэлементами и электронный таймер.

Перед началом измерений следует убедиться, что таймер включен в сеть и его индикаторы светятся. Переключатель режимов работы таймера должен стоять в положении измерения периодов колебаний T_Λ с пиктограммой в виде маятника. Для перевода таймера в режим измерений нужно один раз в начале работы нажать кнопку 3 «Start», при этом загорится зелёный индикатор «Gate». В дальнейшем никаких манипуляций с таймером производить не нужно, он будет непрерывно измерять период поступающего на его вход периодического сигнала от фотодатчика.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Определение коэффициента жёсткости пружины и момента инерции тела маятника

На маятнике закрепляют стержень с грузами. Проводят измерения периода колебаний маятника для различных положений грузов. Строят график зависимости квадрата периода колебаний от квадрата расстояния b.

Измерения

1. Проведите измерения массы стержня $m_с$, массы груза $m_{гр}$, длину стержня $l_с$, радиус отверстия R_1, внешний радиус R_2 и длину цилиндрических грузов $l_{гр}$, закрепленных на нем. Данные запишитев табл. 4.1.

Таблица 4.1

Параметры экспериментальной установки

$m_с$, *г*	
$m_{гр}$, *г*	
$l_с$, *см*	
R_1, *см*	
R_2, *см*	
$l_{гр}$, *см*	

2. Закрепите на маятнике стержень с цилиндрическими грузами,

расположив его симметрично относительно оси вращения (как показано на рис. 4.4).

3. Установите грузы симметрично на стержне в положении, наиболее близком к оси. Запишите расстояние b от грузов до оси (см. рис. 4.4) в табл. 4.2.

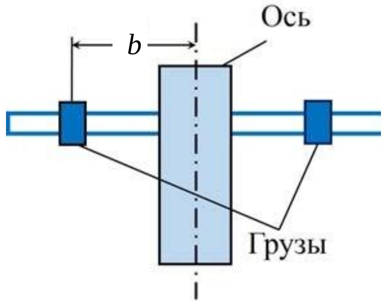

Рис. 4.4. Положение грузов на стержне крутильного маятника.

Таблица 4.2

Экспериментальные данные

b, м	i	T_{ki}, с	T_k, с	T_k, с	ΔT_{ki}, с
	1				
	2				
	3				
	1				
	2				
	3				
…	…	…	…	…	…

1. Измерьте период колебаний. Каждый период измерьте по 3 раза. Данные запишите в табл. 4.2.

Проведите измерения периода колебаний T_k для 6 положений b грузов, перемещая их каждый раз на 5 *см* к концам стержня. Результаты запишите в табл. 4.2.

Обработка результатов

1. Для каждого из положений груза вычислите среднее

арифметическое значение периода T_k и запишите его в таблицу 4.2.

Для каждого из положений груза вычислите частное отклонение от среднего. Усреднив модули частных отклонений, оцените *погрешность измерений* периода. Убедитесь, что приборной погрешностью для данных измерений можно пренебречь.

Таблица 4.3

Вычисленные значения b^2, T^2, A, B и их погрешности

b^2	T^2
$м^2$	$с^2$

Вычислите b^2 и T^2. Результаты запишите в табл. 4.3.

1. Постройте график зависимости T^2 от b^2, используя линейную аппроксимацию и определите коэффициенты A и B в этой зависимости ($T^2 = B + A \cdot b^2$). По графику оцените погрешности значений A и B, запишите результат для этих величин.

2. Из (4.13) следует, что коэффициент жёсткости пружины равен

$$D = 4\pi^2 \frac{2m}{A}. \qquad (4.18)$$

Вычислите значение модуля кручения D. И, оценив его погрешность, запишите результат в стандартной форме.

3. Рассчитайте моменты инерции стержня и грузов по формулам:

$$I_c = \frac{1}{12} m l_c^2; \qquad I_{гр} = \frac{1}{12} m_{гр} l_{гр}^2 + \frac{1}{4} m_{гр}(R_1^2 + R_2^2). \qquad (4.19)$$

Оцените также погрешности этих величин.

4. В соответствии с (4.13) $B = 4\pi^2(I_0 + I_c + 2I_{гр})/D$, откуда

$$I_0 = \frac{BD}{4\pi^2} - I_c - 2I_{гр}.$$

Определите момент инерции маятника, оцените его погрешность и запишите результат.

Упражнение 2. Определение моментов инерции дисков

В этом упражнении проводится измерение момента инерции двух дисков: тонкого металлического и диска из дерева.

Измерения

1. Определите массу (путем взвешивания) и геометрические размеры металлического диска (радиус R и толщину d). Оцените погрешности измерений. Результаты измерений запишите в табл. 4.5.

Таблица 4.4

Данные измерений

Материал диска	m	Δm	R	ΔR	d	Δd
	кг	*кг*	*м*	*м*	*м*	*м*
Металл						
Дерево						

2. Закрепите диск на оси маятника. На край диска прикрепите узкую полоску бумаги (таким образом, чтобы она «пересекала» луч фотоэлемента). Измерьте период колебаний. Измерения проводите 3 раза. Полученные результаты запишите в табл. 4.5.

3. Аналогично пп. 1 и 2 провести измерения для деревянного диска. Данные измерений запишите в табл. 4.5.

Обработка результатов

Для каждого из тел вычислите среднее арифметическое значение периода колебаний маятника и частные отклонения от среднего.

Таблица 4.5

Экспериментальные данные

Материал диска	i,	T_i, с	T , с	T_i, с
Металл	1			
	2			
	3			
Дерево	1			
	2			
	3			

1. По формуле (4.16) вычислите значения моментов инерции дисков.

2. Рассчитайте теоретические значения моментов инерции по формуле $I_{д}^{теор} = \frac{1}{2} m R_{д}^{2}$.

Результаты занесите в таблицу 4.6.

Таблица 4.6

Экспериментальные и теоретические значения моментов инерции

Материал диска	$I^{эксп}$	$I^{теор}$
	$кг \cdot м^2$	$кг \cdot м^2$
Металл		
Дерево		

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должны быть определены коэффициент жёсткости пружины, моменты инерции маятника и дисков, проведено сравнение экспериментально найденных значений с рассчитанными теоретически.

Контрольные вопросы

1. Что такое «твёрдое тело»?

2. Какие типы механического движения выделяют при рассмотрении движения твёрдого тела?

3. Что такое вращательное движение твёрдого тела?

4. Что такое момент силы относительно неподвижной точки пространства? Относительно оси, проходящей через эту точку?

5. Что такое момент импульса твёрдого тела относительно неподвижной точки пространства? Относительно оси, проходящей через эту точку?

6. Запишите уравнение моментов для системы материальных точек (твёрдого тела) относительно неподвижной в ИСО точки пространства. Относительно оси, проходящей через эту точку.

7. Дайте определение момента инерции твёрдого тела относительно оси.

8. Как связаны момент импульса твёрдого тела относительно неподвижной оси вращения и угловая скорость вращения относительно этой оси?

9. Сформулируйте теорему Гюйгенса – Штейнера.

10. В чём идея метода определения момента инерции твёрдого тела с использованием его вращательных колебаний, который используется в данной работе?

11. Как экспериментально определяется модуль упругости пружин ?

12. Опишите устройство лабораторной установки.

13. Расскажите о порядке выполнения лабораторной работы и проведении измерений.

14. Выведите формулы для вычисления моментов инерции тел по указанию преподавателя: тонкий стержень, цилиндр, тонкие прямоугольная и треугольная пластины, конус, шар, параллелепипед.