Задача № 101
(*Лабораторная работа* 1.2)
Изучение динамики простейших систем с помощью машины Атвуда

При подготовке к выполнению этой задачи следует ознакомиться с теорией по учебным пособиям:
1. П.К. Кашкаров, А.В. Зотеев, А.Н. Невзоров, А.А. Склянкин. «Задачи по курсу общей физики с решениями. *«Механика. Электричество и магнетизм»*, М., изд. МГУ§ 1–3 учебного пособия.
2. И.В. Савельев. "Курс физики. Том 1. Механика. Молекулярная физика", М., изд. Наука. Глава “Механика твёрдого тела”.

1. Цель работы

Цель данной работы состоит в экспериментальном изучении законов кинематика и динамики вращательного и поступательного движения твёрдого тела.

Идея эксперимента

Изучение законов равноускоренного движения проводится на основе анализа кинематических характеристик движения системы тел. Для этого используется машина Атвуда, с помощью которой можно получать различные, не слишком большие (по сравнению с ускорением свободного падения) ускорения.

2. Теоретическая часть

Установка, получившая название «машина Атвуда», схематически изображена на рис. 101.1. Через легкий блок, способный вращаться вокруг горизонтальной оси, перекинута тонкая легкая нить с подвешенными на ней двумя одинаковыми грузами массой m. При хорошей балансировке системы она должна находиться в состоянии безразличного равновесия. Ускоренное движение возникает лишь тогда, когда на один из грузов кладут небольшой дополнительный – “перегрузок” массой Δm. При теоретическом анализе будем обозначать общую массу подвешенных грузов справа и слева соответственно $m_1 = m + \Delta m$ и $m_2 = m$.

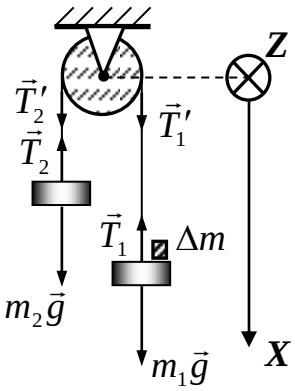

Рис. 101.1

Выберем систему координат так, как показано на рис. 101.1, и изобразим действующие на тела системы силы: силы тяжести и силы натяжения нитей.

Будем считать, что нить, на которой подвешены грузы, невесома и нерастяжима; грузы могут перемещаться вертикально; нить не проскальзывает по блоку; сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Запишем уравнения движения каждого из грузов вдоль оси X и уравнение кинематической связи (являющееся следствием нерастяжимости нити):

$$\begin{cases} m_1 a_{1x} = m_1 g - T_1, & (101.1) \\ m_2 a_{2x} = m_2 g - T_2, & (101.2) \\ a_{1x} + a_{2x} = 0. & (101.3) \end{cases}$$

Здесь a_{1x} и a_{2x} – проекции ускорений грузов на ось X, T_1 и T_2 – модули сил натяжения нити.

Докажем то, что модуль силы натяжения нити одинаков в любом сечении её прямолинейных участков (в рамках выбранной модели невесомости нити). Запишем уравнение движения любого прямолинейного отрезка нити вдоль оси X:

$$m_{\text{н}} a_x = T_{\text{н}} - T_{\text{в}} + m_{\text{н}} g\,, \qquad (101.4)$$

где $m_{\text{н}}$ – масса выделенного участка нити, a_x – проекция его ускорения на ось X, $T_{\text{н}}$ и $T_{\text{в}}$ – модули сил натяжения, действующих на выделенный участок нити со стороны нижнего и верхнего примыкающих к нему участков нити. Так как мы договорились считать нить невесомой, $m_{\text{н}}a_x$, $m_{\text{н}}a_x$ и mg равны нулю. Отсюда и следует, с учётом (101.4), равенство модулей сил натяжения.

Если применить, кроме того, третий закон Ньютона для сил, приложенных к грузам со стороны нити, и сил натяжения самих нитей, то получим равенства: $T_1 = T_1'$ и $T_2 = T_2'$.

Запишем теперь уравнение динамики вращательного движения блока в проекции на горизонтальную ось Z, проходящую через центр блока:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = T_1 R - T_2 R - N_{\text{тр}}. \qquad (101.5)$$

Здесь J_z – момент инерции блока относительно выбранной оси, ω – угловая скорость вращения блока, $N_{\text{тр}}$ – модуль момента сил трения в оси блока.

Система уравнений (101.1) – (101.5) существенно упрощается, если считать не только нить, но и блок невесомым (J_z = 0), а трение в оси блока пренебрежимо малым (допущение об отсутствии силы сопротивления воздуха мы уже оговорили ранее). Из (101.5) следует, что модули сил натяжения нити равны также слева и справа от блока. Равны также и силы натяжения нити, приложенные к грузам:

$$T_1 = T_2 = T\,. \qquad (101.6)$$

Решая систему уравнений (101.1) – (101.3) с учётом последнего равенства (101.6) относительно ускорений грузов, которые, очевидно, равны по модулю ($a_{1x} = -a_{2x} = a$) получим:

$$a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,. \qquad (101.7)$$

Или с учётом ранее принятых обозначений $m_1 = m + \Delta m$ и $m_2 = m$:

$$a = \frac{\Delta m}{2m + \Delta m} g\,. \qquad (101.8)$$

Заметим, что полученный результат имеет ясный физический смысл: причина ускорения, возникающего в системе – действие силы тяжести на “перегрузок” Δm. Она и оказалась в числителе. Ускорение тем меньше, чем больше полная инертность грузов – их масса (при учёте инертности блока его характеристика – момент инертности – также “попадёт” в знаменатель).

Как видим, ускорение тел системы меньше ускорения свободного падения и его можно весьма тонко регулировать, меняя отношение $\Delta m/m$.

Получить более точные результаты, учитывающие наличие массы у блока и трения в его оси можно, решив полную систему уравнений (101.1) – (101.5), добавив в него, к тому же, уравнение кинематической связи между модулями углового ускорения блока и линейного ускорения грузов. В этом случае силы натяжения нитей слева и справа от блока уже будут отличаться. Такая система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} (m+\Delta m)a = (m+\Delta m)g - T_1, & (101.9) \\ ma = T_2 - mg, & (101.10) \\ J_z\beta = (T_1 - T_2)R - N_{\text{тр}}, & (101.11) \\ a = \beta R, & (101.12) \end{cases}$$

где $J_z = \frac{1}{2}m_0R^2$ – момент инерции однородного цилиндрического блока относительно оси Z, m_0 и R – масса и радиус блока, β – модуль углового ускорения блока, $N_{\text{тр}}$ – модуль момента сил трения в оси блока.

Решая систему уравнений (101.9) – (101.12), получим

$$a = \frac{\Delta mg - N_{\text{тр}}/R}{0{,}5m_0 + 2m + \Delta m}. \qquad (101.13)$$

Очевидно, что при учёте весомости блока и трения в его оси ускорение тел меньше, чем следует из равенства (101.8).

3. Экспериментальная установка

Машина Атвуда состоит из прикрепленной к основанию вертикальной стойки, на верхнем конце которой имеется система из двух легких *блоков* 1, способных вращаться с малым трением (рис. 101.2). Через блок перекинута легкая нить, к концам которой прикреплены две одинаковых *платформы* 2 массой $m_{пл}$. На платформы 2 можно помещать добавочные *грузы* 3 в виде тонких пластин (перегрузки), в результате этого система грузов начинает двигаться с некоторым ускорением. Меняя массу перегрузка, можно менять ускорение системы. Система грузов удерживается в состоянии покоя с помощью *электромагнита* 4. При нажатии на кнопку *системы управления электромагнитом* 5 происходит разблокировка системы, и грузы начинают движение.

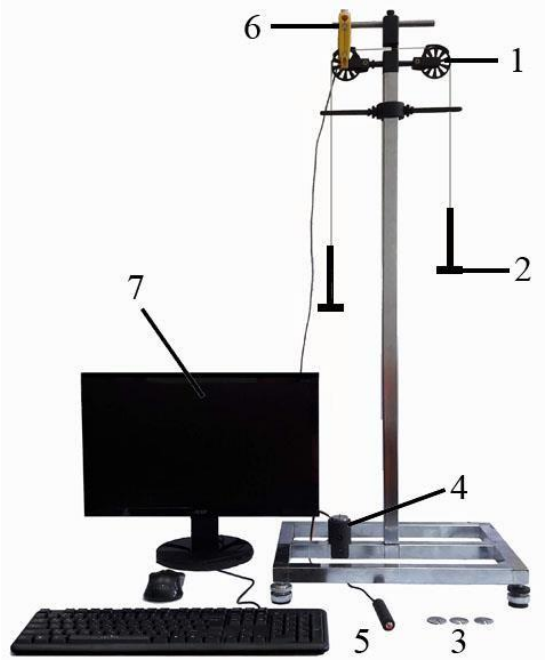

Рис. 101.2. Экспериментальная установка.

Измерение зависимости расстояния прошедшего *грузами* 2 от времени, осуществляется при помощи *фотоэлектрического датчика 6*

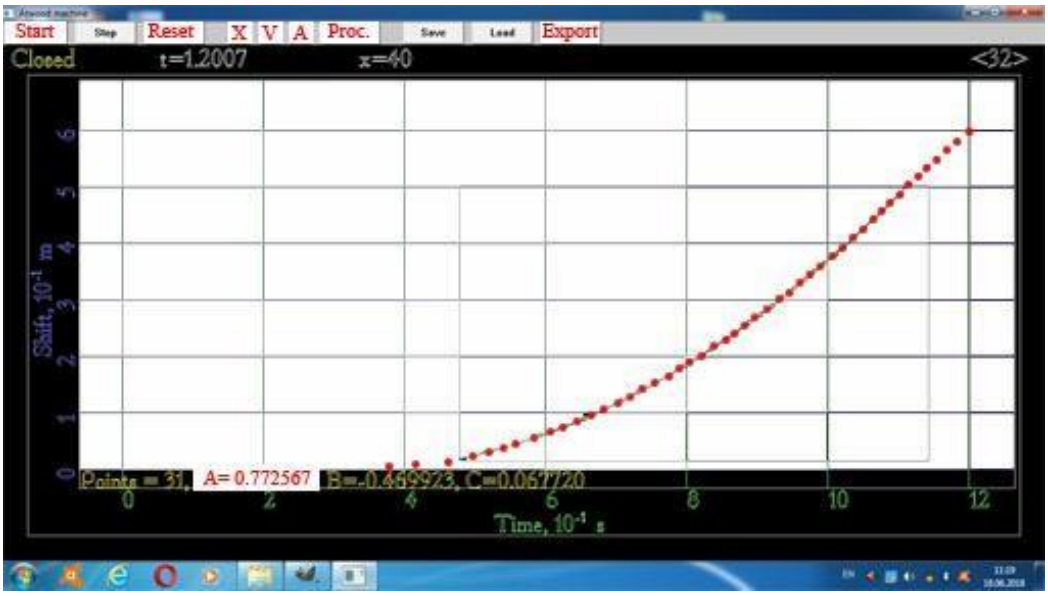

Рис. 101.3. Внешний вид интерфейса программы «Машина Атвуда».

и *компьютера 7*. Для этого на компьютере установлена программа «Машина Атвуда». Внешний вид интерфейса программы показан на рис. 101.3. Запуск измерений осуществляется нажатием кнопки «*Start*» в верхнем левом углу и последующим нажатием кнопки *системы управления электромагнитом* 5. После этого в режиме реального времени на экране компьютера отображаются экспериментальные данные (зависимость координаты груза от времени $x(t)$). Координата груза в каждый момент времени равна расстоянию, на которое разматывается нить при повороте блока на один "лепесток", которое вычисляется путём деления длины окружности блока на количество лепестков.

Для отчистки экрана компьютера и проведения нового эксперимента необходимо нажать кнопку «*Reset*». Кроме зависимости пройденного грузами расстояния от времени имеется возможность отобразить графики зависимости скорости и ускорения грузов от времени, для этого необходимо нажать кнопки «*V*» и «*A*» соответственно.

В режиме отображения «*V*» отображается скорость, вычисленная по двум соседним точкам ($x(t)$) по формуле:

$$\upsilon = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i}$$

В режиме отображения «*A*» отображается ускорение, вычисленное по трём соседним точкам по формуле:

$$a = \frac{\dfrac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} - \dfrac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}}{\dfrac{t_{i+1} - t_i}{2} + \dfrac{t_i - t_{i-1}}{2}}.$$

Для более точных расчётов используется метод наименьших квадратов (МНК). Программой МНК по экспериментальным точкам строится парабола, наиболее близко приближающаяся к экспериментальным точкам

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Эта кривая сравнивается с теоретическим предсказанием:

$$x = a\frac{(t-t_0)^2}{2} + \upsilon_0(t-t_0) + x_0$$

или

$$x = a\frac{t^2}{2} + (\upsilon_0 - at_0)t + \left(x_0 - \upsilon_0 t_0 + a\frac{t_0^2}{2}\right)$$

Если приравнять коэффициенты при t^2 в теоретическом предсказании и кривой, полученной при помощи МНК, получим:

$$A = \frac{a}{2}.$$

Поэтому, зная коэффициент A, полученный в МНК, можно получить ускорение груза, воспользовавшись равенством

$$a = 2A.$$

В программе имеется встроенная функция МНК, которая, используя экспериментальные точки, строит параболу и определяет коэффициенты A, B и C . Для этого необходимо нажать кнопку «Proc.» и выделить мышкой область с экспериментальными точками, после чего внизу появятся значения коэффициентов A, B и C (см. рис. 101.3).

Для дальнейшего построения графиков и обработки экспериментальных данных имеется возможность кнопкой «*Export*» экспортировать данные в текстовый файл.

4. Порядок проведения работы

Упражнение 1. Измерение ускорения грузов при одинаковой общей массе *M*

Параметры установки:

Масса грузов $m = (\ldots \pm 0{,}1)$ *г*

Масса платформы $m_{пл} = (\ldots \pm 0{,}1)$ *г*

Измерения

Для проведения N измерений необходимо, чтобы на правой платформе машины Аутвуда было N грузов, а на левой платформе N–1 таких же грузов. На рис. 101.4 показано

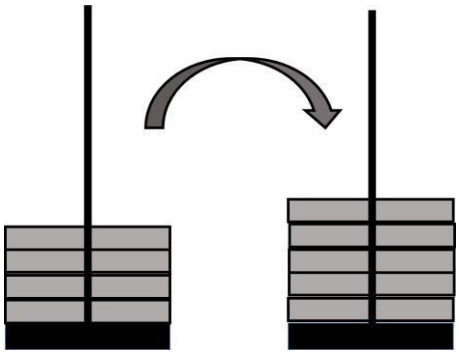

Рис. 101.4. Исходное расположение грузов на платформах машины Аутвуда

исходное расположение грузов (перегруз в один груз) для проведения N = 5 измерений.

Для каждой пары значений масс m_1 и m_2 проведите измерения (трижды) ускорения грузов. Расчёт проводится на компьютере с помощью программы МНК. Новые значения m_1 и m_2 получаются после каждого переноса груза с левой платформы на правую.

Такие измерения проводятся до тех пор, пока на левой платформе не останется грузов. Результаты запишите в табл. 101.1.

Экспериментальные данные Таблица 101.1

Номер изме-рения	m_1, *г*	m_2, *г*	$a_{эксп.}$							
			a_1, *м/с*^{2}	Δa_1, *м/с*^{2}	a_2, *м/с*^{2}	Δa_2, *м/с*^{2}	a_3, *м/с*^{2}	Δa_3, *м/с*^{2}	$\Delta a_{изм}$, *м/с*^{2}	$\langle a_{эксп.} \rangle$, *м/с*^{2}
1										
2										
3										
4										
5										

Общая масса грузов $M = m_1 + m_2 + m_{пл}$ = (±) *г*

Обработка результатов

1. Для каждой пары значений m_1 и m_2 рассчитайте среднее арифметическое значение a_i и запишите результат в таблицы 101.1 и 101.2. Для каждого отдельного измерения определите частное отклонение Δa_i и, усреднив, запишите в таблицу 101.1 погрешность измерений каждого из 5 значений ускорений и сами ускорения в стандартной форме: $a = (\langle a \rangle \pm \Delta a)$ *м/с*^{2}.

2. Для каждого из 5-ти измерений рассчитайте значение $\Delta m \cdot g$ (считая, что для Москвы g = 9,8154 *м/с*^{2}).

3. Для каждого значения Δm определите значения $a_{теор}$, используя равенство

$$a = \frac{\Delta m g}{M}.$$

4. Для каждого значения Δm рассчитайте относительное отличие значений $a_{\text{теор}}$ и $a_{\text{эксп}}$:

$$\varepsilon_a = \frac{\left|a_{\text{теор}} - a_{\text{эксп}}\right|}{a_{\text{теор}}} \cdot 100\%$$

5. Представьте на одном графике зависимости $a_{\text{эксп}}\left(\frac{\Delta m}{M}\right)$, $a_{\text{теор}}\left(\frac{\Delta m}{M}\right)$ и $\varepsilon_a\left(\frac{\Delta m}{M}\right)$.

Все результаты запишите в табл. 101.2.

Экспериментальные результаты*) **Таблица 101.2**

Номер измерения	Δmg, *г*	$(a_{\text{эксп}} \pm \Delta a)$ *м/с*^{2}	$a_{\text{теор}}$, *м/с*^{2}	ε_a , %
1				
2				
3				
4				
5				

Упражнение 2.**) Измерение ускорения грузов при одинаковой разности масс Δm

1. Для проведения эксперимента рекомендуется проводить измерения при Δm равной массе «малого» груза. На рис. 101.5 показано расположение грузов для первого измерения.

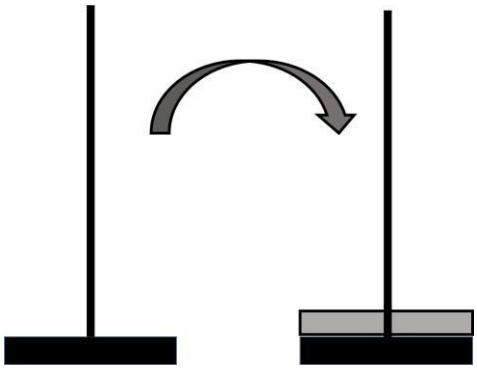

Рис. 101.5. Исходное расположение грузов на платформах машины Аутвуда при выполнении *упр*.2.

Проведите измерения ускорения грузов три раза. Затем добавьте по одному малому грузу на каждую платформу и повторите измерения нового ускорения трижды. Такие измерения проводятся последовательно для 5-ти разных положений грузов. Результаты запишите в табл. 101.3.

*) Последние две строки используются в упражнении №2.
**) Выполняется по согласованию с преподавателем.

Экспериментальные результаты **Таблица 101.3**

Номер изме-рения	m_1, г	m_2, г	$a_{эксп.}$							
			a_1, м/с^2	Δa_1, м/с^2	a_2, м/с^2	Δa_2, м/с^2	a_3, м/с^2	Δa_3, м/с^2	$\Delta a_{изм}$, м/с^2	$\langle a_{эксп.} \rangle$, м/с^2
1										
2										
3										
4										
5										

Обработка результатов

1. Для каждой пары значений m_1 и m_2 рассчитайте среднее арифметическое значение a_i и запишите результат в таблицы 101.3 и 101.4. Для каждого отдельного измерения определите частное отклонение Δa_i и, усреднив, запишите в таблицу 101.3 погрешность измерений каждого из 5 значений ускорений и сами ускорения в стандартной форме: $a = (\langle a \rangle \pm \Delta a)$ м/с^2.

2. Рассчитайте значение $\Delta m \cdot g$ (считая, что для Москвы g = 9,8154 м/с^2). Для каждого значения M рассчитайте относительное отличие значений $a_{теор}$ и $a_{эксп}$:

$$\varepsilon_a = \frac{|a_{теор} - a_{эксп}|}{a_{теор}} \cdot 100\%$$

Полученные результаты запишите в табл. 101.4.

3. Представьте на одном графике зависимости $a_{эксп}\left(\frac{1}{M}\right)$, $a_{теор}\left(\frac{1}{M}\right)$ и $\varepsilon_a\left(\frac{1}{M}\right)$.

Основные итоги работы

На основании проведенных экспериментов и выполненных расчётов устанавливается характер движения системы тел в машине Атвуда под действием постоянных сил (в частности, проверяется, является ли оно равноускоренным). Экспериментально определяется ускорение. Сравнивая с расчётными значениями ускорений, анализируются возможные причины отклонений.

Контрольные вопросы

1. Опишите устройство лабораторной установки (машины Атвуда).
2. Расскажите о порядке выполнения лабораторной работы и проведении измерений.
3. Как измеряется скорость и ускорение поступательно движущихся тел на данной установке?
4. Сформулировать первый закон Ньютона. Что такое инерциальные системы отсчёта?
5. Сформулируйте второй закон Ньютона.
6. Сформулируйте третий закон Ньютона.
7. Какие типы механического движения выделяют при рассмотрении движения твёрдого тела?
8. Что такое «поступательное»/«вращательное» движение твёрдого тела?
9. Что такое момент силы относительно неподвижной точки пространства? Относительно оси, проходящей через эту точку?
10. Дайте определение момента инерции твёрдого тела относительно оси.
11. Запишите уравнение динамики вращательного движения блока вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр блока.
12. Что такое момент сил трения?