

Задача № 101 (Лабораторная работа 1.2) Изучение динамики простейших систем с помощью машины Атвуда

При подготовке к выполнению этой задачи следует ознакомиться с теорией по учебным пособиям:

1. П.К. Кашкаров, А.В. Зотеев, А.Н. Невзоров, А.А. Склянкин. «Задачи по курсу общей физики с решениями. «Механика. Электричество и магнетизм», М., изд. МГУ§ 1–3 учебного пособия.

2. И.В. Савельев. "Курс физики. Том 1. Механика. Молекулярная физика", М., изд. Наука. Глава "Механика твёрдого тела".

1. Цель работы

Цель данной работы состоит в экспериментальном изучении законов кинематика и динамики вращательного и поступательного движения твёрдого тела.

Идея эксперимента

Изучение законов равноускоренного движения проводится на основе анализа кинематических характеристик движения системы тел. Для этого используется машина Атвуда, с помощью которой можно получать различные, не слишком большие (по сравнению с ускорением свободного падения) ускорения.

2. Теоретическая часть

Установка, получившая название «машина Атвуда», схематически изображена на рис. 101.1. Через легкий блок, способный вращаться вокруг горизонтальной оси, перекинута тонкая легкая нить с подвешенными на ней двумя одинаковыми грузами массой m . При хорошей балансировке системы она должна находиться в состоянии безразличного равновесия. Ускоренное движение возникает лишь тогда, когда на один из грузов кладут небольшой дополнительный – «перегрузок» массой Δm . При теоретическом анализе будем обозначать общую массу подвешенных грузов справа и слева соответственно $m_1 = m + \Delta m$ и $m_2 = m$.

Выберем систему координат так, как показано на рис. 101.1, и изобразим действующие на тела системы силы: силы тяжести и силы натяжения нитей.

Будем считать, что нить, на которой подвешены грузы, невесома и нерастяжима; грузы могут перемещаться вертикально; нить не проскальзывает по блоку; сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Запишем уравнения движения каждого из грузов вдоль оси X и уравнение кинематической связи (являющееся следствием нерастяжимости нити):

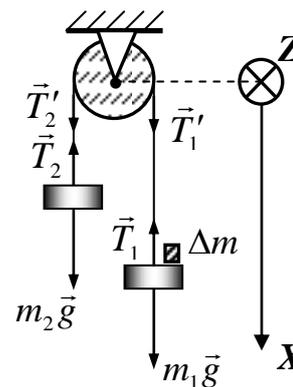


Рис. 101.1

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 a_{1x} = m_1 g - T_1, \\ m_2 a_{2x} = m_2 g - T_2, \\ a_{1x} + a_{2x} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (101.1) \\ (101.2) \\ (101.3) \end{array}$$

Здесь a_{1x} и a_{2x} – проекции ускорений грузов на ось X , T_1 и T_2 – модули сил натяжения нити.

Докажем то, что модуль силы натяжения нити одинаков в любом сечении её прямолинейных участков (в рамках выбранной модели невесомости нити). Запишем уравнение движения любого прямолинейного отрезка нити вдоль оси X :

$$m_n a_x = T_n - T_b + m_n g, \quad (101.4)$$

где m_n – масса выделенного участка нити, a_x – проекция его ускорения на ось X , T_n и T_b – модули сил натяжения, действующих на выделенный участок нити со стороны нижнего и верхнего примыкающих к нему участков нити. Так как мы договорились считать нить невесомой, $m_n a_x$, $m_n g$ и mg равны нулю. Отсюда и следует, с учётом (101.4), равенство модулей сил натяжения.

Если применить, кроме того, третий закон Ньютона для сил, приложенных к грузам со стороны нити, и сил натяжения самих нитей, то получим равенства: $T_1 = T_1'$ и $T_2 = T_2'$.

Запишем теперь уравнение динамики вращательного движения блока в проекции на горизонтальную ось Z , проходящую через центр блока:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = T_1 R - T_2 R - N_{тр}. \quad (101.5)$$

Здесь J_z – момент инерции блока относительно выбранной оси, ω – угловая скорость вращения блока, $N_{тр}$ – модуль момента сил трения в оси блока.

Система уравнений (101.1) – (101.5) существенно упрощается, если считать не только нить, но и блок невесомым ($J_z = 0$), а трение в оси блока пренебрежимо малым (допущение об отсутствии силы сопротивления воздуха мы уже оговорили ранее). Из (101.5) следует, что модули сил натяжения нити равны также слева и справа от блока. Равны также и силы натяжения нити, приложенные к грузам:

$$T_1 = T_2 = T. \quad (101.6)$$

Решая систему уравнений (101.1) – (101.3) с учётом последнего равенства (101.6) относительно ускорений грузов, которые, очевидно, равны по модулю ($a_{1x} = -a_{2x} = a$) получим:

$$a = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}. \quad (101.7)$$

Или с учётом ранее принятых обозначений $m_1 = m + \Delta m$ и $m_2 = m$:

$$a = \frac{\Delta m}{2m + \Delta m} g. \quad (101.8)$$

Заметим, что полученный результат имеет ясный физический смысл: причина ускорения, возникающего в системе – действие силы тяжести на “перегрузок” Δm . Она и оказалась в числителе. Ускорение тем меньше, чем больше полная инертность грузов – их масса (при учёте инертности блока его характеристика – момент инертности – также “попадёт” в знаменатель).

Как видим, ускорение тел системы меньше ускорения свободного падения и его можно весьма тонко регулировать, меняя отношение $\Delta m/m$.

Получить более точные результаты, учитывающие наличие массы у блока и трения в его оси можно, решив полную систему уравнений (101.1) – (101.5), добавив в него, к тому же, уравнение кинематической связи между модулями углового ускорения блока и линейного ускорения грузов. В этом случае силы натяжения нитей слева и справа от блока уже будут отличаться. Такая система уравнений имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} (m + \Delta m)a = (m + \Delta m)g - T_1, \\ ma = T_2 - mg, \\ J_z \beta = (T_1 - T_2)R - N_{\text{тр}}, \\ a = \beta R, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (101.9) \\ (101.10) \\ (101.11) \\ (101.12) \end{array}$$

где $J_z = \frac{1}{2}m_0R^2$ – момент инерции однородного цилиндрического блока относительно оси Z , m_0 и R – масса и радиус блока, β – модуль углового ускорения блока, $N_{\text{тр}}$ – модуль момента сил трения в оси блока.

Решая систему уравнений (101.9) – (101.12), получим

$$a = \frac{\Delta mg - N_{\text{тр}}/R}{0,5m_0 + 2m + \Delta m}. \quad (101.13)$$

Очевидно, что при учёте весомости блока и трения в его оси ускорение тел меньше, чем следует из равенства (101.8).

3. Экспериментальная установка

Машина Атвуда состоит из прикреплённой к основанию вертикальной стойки (снабжена шкалой 1, рис. 101.2), на верхнем конце которой имеется лёгкий блок 2, способный вращаться с малым трением. Через блок перекинута лёгкая нить, к концам которой прикреплены два одинаковых груза 3. На правый груз можно помещать добавочные грузы 4 в виде тонких пластин (перегрузки), обеспечивающие приведение грузов в движение с некоторым ускорением. Изменяя массу перегрузка, можно изменять ускорение системы. После того как груз с перегрузком проходит некоторое расстояние L_1 , перегрузок снимается с помощью кронштейна 5. После снятия перегрузка ускорения грузов определяются только силой трения в оси блока.

Если сила трения невелика, а расстояние, пройденное грузами после снятия перегрузка также мало, то на этом участке движение можно считать равномерным. На стойке укреплены два *фотодатчика* 6, соединённые с *таймером* 7. При этом верхний фотодатчик соединён с *кронштейном* 5. Фотодатчики могут крепиться на стойке в разных положениях. Система грузов удерживается в состоянии покоя специальной *фрикционной муфтой*, которая управляется с помощью электромагнита.

Для измерения времени равномерного движения и управления фрикционной муфтой установка снабжена электронным блоком, в состав которого входят *таймер* 7 и *система управления электромагнитом*. В роли индикатора начального положения груза выступает тонкий стержень (9), который можно передвигать по стойке с помощью подвижной муфты.

При нажатии на клавишу «Сброс» происходит обнуление показаний таймера. В исходном состоянии система блокируется фрикционной муфтой. Разблокировка системы осуществляется нажатием на *кнопку* 8 *системы управления электромагнитом*. Во время прохождения правого груза через верхний фотодатчик запускается таймер. Импульс от нижнего фотодатчика останавливает работу таймера, и результат высвечивается на табло таймера. При этом снова замыкается цепь электромагнита, и система затормаживается фрикционной муфтой.

Перед выполнением эксперимента следует убедиться, что правый груз может свободно опускаться, не касаясь кронштейна и фотодатчиков. В противном случае следует провести необходимые регулировки, используя винты крепления кронштейна и фотодатчиков.

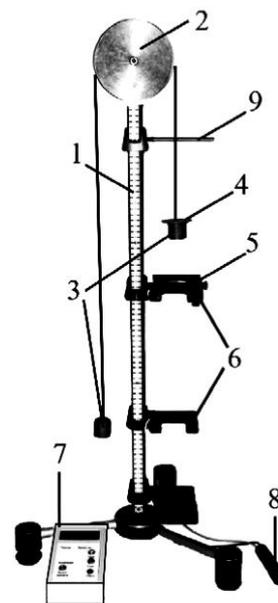


Рис. 101.2. Экспериментальная установка.

4. Порядок проведения работы

Упражнение 1. Анализ закона движения и определение ускорения

Исходя из анализа движения системы тел, проведённого в теоретическом введении, можно предположить, что движение тел на участке L_1 будет равноускоренным. В этом случае закон движения, т.е. зависимость координаты тела от времени, будет иметь вид:

$$x = x_0 + \frac{at^2}{2}, \quad (101.14)$$

где x_0 – координата начального положения груза. Учитывая, что скорость при равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью меняется по закону

$$v = at, \quad (101.15)$$

получаем

$$L_1 = x_1 - x_0 = \frac{v^2}{2a}, \quad (101.16)$$

где v – скорость груза в момент снятия перегрузка и включения таймера, x_1 – координата верхнего фотодатчика. Если в системе отсутствуют силы трения, то с этой же скоростью груз будет проходить расстояние между фотодатчиками после снятия с него перегрузка:

$$v = \frac{L_2}{t_2}, \quad (101.17)$$

Здесь $L_2 = x_2 - x_1$ – расстояние между двумя фотодатчиками (x_2 – координата нижнего фотодатчика), t_2 – время движения на этом участке пути.

Измерения

Параметры установки:

Масса грузов	$m = (\dots \pm 0,1) \text{ г}$
Масса “перегрузков”	$\Delta m_1 = (\dots \pm 0,1) \text{ г}$
	$\Delta m_2 = (\dots \pm 0,1) \text{ г}$
	$\Delta m_3 = (\dots \pm 0,1) \text{ г}$
Координата верхнего фотодатчика	$x_1 = (\dots \pm 0,1) \text{ см}$
Расстояние между датчиками	$L_2 = (\dots \pm 0,1) \text{ мм}$

1. Установить правый груз в верхнем положении x_0 и положить на него один из перегрузков^{*)}. Затем установить верхний фотодатчик с закреплённым на нём кронштейном на отметке x_1 так, чтобы расстояние между датчиками L_2 было равно 10 см. В дальнейшем расстояние L_2 не изменяется.

2. Привести в движение систему тел и определить время пролёта t_2 груза между фотодатчиками. При фиксированном значении L_1 измерения времени t_2 провести 3 раза. Результаты измерений занести в табл. 101.1.

Экспериментальные данные Таблица 101.1

$L_1,$ см	n	1-й перегрузок			2-й перегрузок			3-й перегрузок		
		$t_2, \text{ с}$	$\Delta t_2, \text{ с}$	$(t_2 \pm \Delta t_2) \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$\Delta t_2, \text{ с}$	$(t_2 \pm \Delta t_2) \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$\Delta t_2, \text{ с}$	$(t_2 \pm \Delta t_2) \text{ с}$
	1									
	2									
	3									
	1									
	2									

^{*)} Массы грузов и перегрузков указаны на установке.

	3									
	1									
	2									
	3									
...										

3. Выполнить измерение времени t_2 в соответствии с п. 2 для трёх перегрузков с различными массами Δm_i . Полученные значения записать в табл. 101.1.

4. Изменить координату x_0 начального положения груза. Для нового значения L_1 в соответствии с п. 2 провести измерения времени движения груза между двумя фотодатчиками. Измерить время t_2 в соответствии с пп. 2 и 3 в общей сложности не менее чем для пяти различных L_1 и трёх перегрузков с различными массами Δm_i . В итоге должно получиться 15 значений времени t_2 .

Обработка результатов

1. Для каждого L_1 и каждого из перегрузков вычислить среднее арифметическое значение t_2 и записать результат в стандартной форме в таблице 101.1. с учётом погрешности эксперимента:

$$t_2 = (\langle t_2 \rangle \pm \Delta t_2) c.$$

2. Для каждого из проведенных измерений определить скорость

$$v = \frac{L_2}{\langle t_2 \rangle}.$$

Найти также значения квадратов скоростей и оценить для них относительно, а затем и абсолютную $\Delta(v^2)$ погрешность эксперимента (одно значение):

$$\varepsilon_{v^2} = 2\varepsilon_v = 2 \left(\frac{\Delta L^{\text{пр}}}{l} + \frac{\Delta t^{\text{изм.}}}{t} \right),^*) \quad \Delta(v^2) = \varepsilon_{v^2} \cdot v^2. \quad (101.18)$$

3. Результаты вычислений для скоростей и их квадратов при разных значениях L_1 и Δm_i занести в табл. 101.2.

Вычисленные значения Таблица 101.2

$L_1,$ см	1-й перегрузок		2-й перегрузок		3-й перегрузок	
	$v, \text{ м/с}$	$v^2, (\text{ м/с})^2$	$v, \text{ м/с}$	$v^2, \text{ м/с}$	$v, \text{ м/с}$	$v^2, \text{ м/с}$
...						

*) Здесь учтено, что приборная погрешность определения времени пренебрежимо мала

3. Как следует из (101.16), зависимость $v^2(L_1)$ является линейной. Для трёх перегрузок построить графики зависимости v^2 от L_1 . При построении учесть (указав доверительный интервал) найденные выше значения погрешностей v^2 . По углу наклона определить коэффициент пропорциональности B в равенстве $v^2 = A \cdot x$. Из (101.16) следует, что ускорение a равно

$$a = \frac{A}{2}.$$

Найти три значения a и оценить их погрешности измерений по «разбросу» экспериментальных точек относительно соответствующих прямых на графике. Результаты записать в табл. 101.3.

Экспериментальные результаты^{*)}

Таблица 101.3

Номер перегрузка	$\Delta m, \text{г}$	$A, \text{м/с}^2$	$(a \pm \Delta a) \text{ м/с}^2$	Теоретическое $(a \pm \Delta a) \text{ м/с}^2$
1				
2				
3				
4				
5				

4. Вычислить теоретические значения ускорений, исходя из равенства (101.8). Сравнить полученные значения ускорений с установленными экспериментально.

Упражнение 2.^{**)} Определение момента силы трения в оси блока (I метод)

Если масса перегрузка Δm мала по сравнению с массой грузов и блока, то мы можем переписать равенство (101.13) для ускорения груза в приближённом виде:

$$a \approx \frac{\Delta m \cdot g}{0,5m_0 + 2m} - \frac{N_{\text{тр}}/R}{0,5m_0 + 2m}. \quad (101.19)$$

Поскольку в этом приближении, как мы видим, ускорение линейно зависит от массы перегрузка, то можно определить значение момента сил трения в оси блока, построив график зависимости ускорения груза от массы перегрузка $a(\Delta m)$, и найдя точку пересечения графика с осью ускорений.

Измерения

1. Измерить штангенциркулем радиус R блока и определить его массу m_0 . Эти измерения провести на незакреплённом блоке (входит в комплект установки),

^{*)} Последние две строки используются в упражнении №2.

^{**)} Выполняется по согласованию с преподавателем.

имеющим такие же размеры и массу, как и блок, закрепленный на вертикальной стойке. Результаты измерений записать в стандартной форме:

$$R = (R \pm \Delta R) \text{ см} \quad \text{и} \quad m_0 = (m \pm \Delta m) \text{ см.}$$

2. Воспользовавшись установками упражнения 1 (т.е. не меняя значения x_0 , x_1 и x_2) дополнительно экспериментально измерить время пролёта t_2 ещё для двух масс перегрузков (для получения новых значений Δm можно использовать комбинацию из них). Добавить данные для времени пролёта для двух новых значений масс перегрузков в Табл. 101.1.

Определить по ним и ранее измеренным значениям для всех 5 величин Δm ускорения a :

$$a = \frac{v^2}{2L_1} = \frac{L_2^2}{2\langle t_2^2 \rangle L_1}. \quad (101.20)$$

Эти результаты записать в табл. 101.3.

Обработка результатов

В соответствии с соотношением (101.18) зависимость $a(\Delta m)$ является линейной. Используя результаты, записанные в таблице 101.3, построить график зависимости ускорения от массы перегрузка $a(\Delta m)$. Определить значение $a_0 = \dots$ по точке пересечения графика с осью ускорений. Из (101.19) следует, что момент сил трения равен

$$N_{mp} = a_0 \cdot (0,5 m_0 + 2m) \cdot R, \quad (101.21)$$

где – модуль значения ускорения в точке пересечения графика зависимости $a(\Delta m)$ с осью ускорений. Вычислить, исходя из этого значение N_{mp} и, оценив его погрешность, записать результат в стандартной форме.

Упражнение 3. ^{}) Определение момента силы трения в оси блока (II метод)**

В этом упражнении для определения значения момента силы трения необходимо постепенно увеличивать массу одного из грузов до значения Δm_{\min} (добавляя на него маленькие перегрузки), пока система не придет в ускоренное движение. Тогда в соответствии с равенством (101.13) момент сил трения будет равен:

$$N_{mp} = \Delta m_{\min} g \cdot R. \quad (101.22)$$

^{**}) Выполняется по согласованию с преподавателем.

Измерения

1. Для определения Δm_{\min} рекомендуется в качестве перегрузок использовать маленькие кусочки бумаги, добавляя их до тех пор, пока система не придёт в ускоренное движение. Взвешиванием найти массу Δm_{\min} этих кусочков.

Такие измерения повторить три раза для **нескольких начальных углов поворота блока**, чтобы исключить влияние возможного наличия момента сил тяжести, связанного с асимметрией блока. Результаты записать в табл. 101.5.

Экспериментальные данные

Таблица 101.4

Начальное положение	$\Delta m_{\min}, \text{г}$	$N_{\text{тр}}, \text{Н}\cdot\text{м}$	$\Delta N_{\text{тр}}, \text{Н}\cdot\text{м}$
1			
2			
3			

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным определить среднее значение Δm_{\min} .
2. Рассчитать момент сил трения в оси блока предложенным методом, используя значение радиуса блока из *упр. 2*. Результаты записать в табл. 101.4.
3. По полученным данным оценить погрешность и записать результат для момента сил трения в стандартной форме.
4. Сравнить значения момента сил трения полученные в *упр. 3* и *2*.
5. Используя определенные в *упр. 2* и *упр. 3* значения момента сил трения, по формуле (101.13) рассчитать ускорения для трёх значений масс перегрузок, использовавшихся в *упр. 1*.
6. Сравнить значения ускорений, полученные в *упр. 1*, с рассчитанными при учёте весомости блока и наличия сил трения в его оси. Проанализировать полученные результаты.

Основные итоги работы

На основании проведенных экспериментов и выполненных расчётов устанавливается характер движения системы тел в машине Атвуда под действием постоянных сил (в частности, проверяется, является ли оно равноускоренным). Экспериментально определяется ускорение и момент сил трения в оси установки. Сравнивая с расчётным значением ускорений, анализируется влияние на них весомости блока и момента силы трения в оси блока.

Контрольные вопросы

1. Опишите устройство лабораторной установки (машины Атвуда).
2. Расскажите о порядке выполнения лабораторной работы и проведении измерений.
3. Как измеряется скорость и ускорение поступательно движущихся тел на данной установке?
4. Сформулировать первый закон Ньютона. Что такое инерциальные системы отсчёта?
5. Сформулируйте второй закон Ньютона.
6. Сформулируйте третий закон Ньютона.
7. Какие типы механического движения выделяют при рассмотрении движения твёрдого тела?
8. Что такое «поступательное»/«вращательное» движение твёрдого тела?
9. Что такое момент силы относительно неподвижной точки пространства? Относительно оси, проходящей через эту точку?
10. Дайте определение момента инерции твёрдого тела относительно оси.
11. Запишите уравнение динамики вращательного движения блока вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр блока.
12. Что такое момент сил трения?