Задача № 106

(*Лабораторная работа* 3.3)

Определение момента инерции маятника Максвелла

При подготовке к выполнению этой задачи следует ознакомиться с теорией, используя пособия из списка литературы, рекомендованной по курсу, например:

1. П.К. Кашкаров, А.В. Зотеев, А.Н. Невзоров, А.А. Склянкин. «Задачи по курсу общей физики с решениями. *«Механика. Электричество и магнетизм»*, М., изд. МГУ§ 3 учебного пособия.
2. А.В. Зотеев, А.А. Склянкин. Лекции по курсу общей физики. Механика. Электричество и магнетизм. Москва, Физический факультет МГУ. 2014.
3. И.В. Савельев «Курс физики», т.1, М. Наука, глава «Механика твёрдого тела».

1. Цель работы

Экспериментальное ознакомление с движением твёрдого тела (ТТ) на примере плоского движения маятника Максвелла и определение его момента инерции.

Идея эксперимента

В эксперименте используется маятник Максвелла – устройство, состоящее из массивного диска, закрепленного на оси, подвешенной на двух нерастяжимых нитях. Маятник способен совершать колебательные движения вверх–вниз, и при этом все его точки перемещаются, оставаясь в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной вертикальной плоскости. Таким образом, маятник Максвелла совершает плоское движение.

2. Теоретическая часть

Если твёрдое тело совершает **поступательное движение**, то все его точки движутся по одинаковым траекториям и в любой момент времени имеют одинаковые кинематические характеристики. Следовательно, в этом случае достаточно описать движение центра масс тела, используя второй закон Ньютона и законы равнопеременного движения.

Центр масс тела – это точка, положение которой определяются равенством:

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i}, \qquad (106.1)$$

где $\mathbf{r}_i$ – радиус вектор i – го малого элемента, на которые можно разбить тело, Δm_i – масса этого элемента. Очевидно масса всего тела $m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$, тогда координаты центра масс равны:

$$x_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \; ; \quad y_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \; ; \quad z_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \, .$$

Скорость центра масс:

$$V_c = \dot{\mathbf{r}}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i V_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i = \frac{\mathbf{p}}{m}, \qquad (106.2)$$

где $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}$ – импульсы отдельных элементов и всего тела соответственно.

В инерциальной системе отсчёта центр масс тела движется также как материальная точка массы m под действием всех внешних сил приложенных к телу (теорема о движении центра масс):

$$\mathbf{a}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i}{m} \, . \qquad (106.3)$$

Для анализа **вращательного и плоского движений** твёрдого тела вводятся дополнительные понятия.

- ***Момент силы*** **F** ***относительно точки*** **пространства *O***:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r},\mathbf{F}], \qquad (106.4)$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор проведенный из точки O в точку приложения силы $\mathbf{F}$.

- ***Момент импульса материальной точки относительно точки O***:

$$\mathbf{M}_i = [\mathbf{r}_i,\mathbf{p}_i] = [\mathbf{r}_i,\Delta m_i \mathbf{V}_i]. \qquad (106.5)$$

- ***Момент импульса твёрдого тела относительно точки O***:

$$\mathbf{M} = \sum_{i}^{n} [\mathbf{r}_i,\mathbf{p}_i] = \sum_{i}^{n} [\mathbf{r}_i,\Delta m_i \mathbf{V}_i] \, , \qquad (106.6)$$

где $\mathbf{r}_i$ – радиус вектор i – го элемента ТТ массой Δm_i, проведённый из точки O.

- В *инерциальной системе отсчёта* (ИСО) производная по времени от момента импульса твёрдого тела относительно неподвижной в этой СО точки O равна суммарному моменту внешних сил, действующих на это тело, относительно той же точки O:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i^{внешн} \, . \qquad (7)$$

При описании ***вращения*** ТТ ***вокруг неподвижной оси*** векторы моментов импульса $\mathbf{M}$ и внешних сил $\mathbf{N}_i^{внешн}$ можно спроецировать на некоторую ось OZ, содержащую точку O. Указанные проекции называют ***моментами относительно оси*** *(или “осевыми моментами”)*. Это позволяет перейти к скалярной форме записи

уравнения моментов:

$$\frac{dM_z}{dt}=\sum_{i=1}^{n}N_{zi}^{внеш}\,. \qquad (106.8)$$

Можно показать, что осевой момент импульса равен $M_z=\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i R_i^2\right)\omega=I_z\omega$.

Здесь I_z – ***момент инерции твёрдого тела*** относительно оси OZ, который находится суммированием моментов инерции малых элементов, составляющих ТТ:

$$I_Z=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i R_i^2\quad, \qquad (106.9)$$

где R_i – расстояние от i – ого элемента до оси OZ.

С учётом этого из равенства (106.8) для систем с постоянным моментом инерции следует справедливость ***уравнения динамики вращательного движения твёрдого тела***:

$$I_z\beta=\sum_{i=1}^{n}N_{zi}^{внеш}\,. \qquad (106.10)$$

Здесь β – угловое ускорение. Данное равенство является аналогом второго закона Ньютона, но для вращательного движения ТТ.

При любом разбиении **плоского движения твёрдого тела** на поступательное и вращательное ось вращения ориентирована перпендикулярно плоскостям, в которых происходит движение точек ТТ. Однако при наличии внешних сил эта ось движется с ускорением и уравнение, полученное для случая оси, неподвижной относительно инерциальной СО, вообще говоря, неприменимо. В единственном случае, когда ось проходит через центр масс тела, уравнение (106.10) сохраняет свою форму, и для ускоренного движения:

$$I_{zc}\beta=\sum_{i=1}^{n}N_{zci}^{внеш}\,, \qquad (106.10a)$$

где дополнительный индекс “c” отражает отмеченное выше условие выбора оси вращения. Поступательная компонента движения описывается уравнением (106.3).

Как мы видели, при анализе как вращательного, так и плоского движения используется момент инерции ТТ относительно оси. В ряде случаев для вычисления моментов инерции тел оказывается полезной теорема «о параллельных осях» (**теорема Гюйгенса-Штейнера**). Её содержание состоит в следующем: если известен момент инерции твёрдого тела относительно оси, **проходящей через его центр масс** I_{zc}, то момент инерции относительно любой **параллельной** оси OZ равен

$$I_z=I_{zc}+mb^2, \qquad (106.11)$$

где m – масса тела, а b – расстояние между осями.

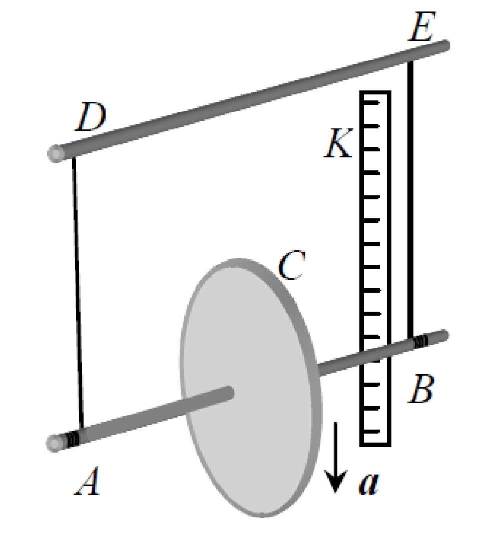


Рис. 106.1. Маятник Максвелла.

Маятник Максвелла (см. рис. 106.1) состоит из массивного диска *C*, закреплённого на оси *AB* (металлическом стержне круглого сечения), подвешенной на двух тонких нитях. Нити пропущены через два отверстия в планке *DE*, которая укреплена на массивном штативе. На середине планки имеется винт, которым нить закрепляется в нужном положении после уравнивания длин отрезков нити *AD* и *BE*. Нити тщательно, виток к витку, наматываются на стержень (от его концов к диску). Положение оси и расстояния, которые она проходит при движении маятника, измеряются по шкале *K*. После освобождения маятника он начинает движение из верхнего положения под действием силы тяжести: поступательное – вниз и вращательное – вокруг своей оси симметрии. Вращение, продолжаясь по инерции в низшей точке, когда нити уже размотаны, приводит вновь к наматыванию нитей на ось, а, следовательно, и к подъёму диска. Постепенно движение маятника вверх замедляется, он останавливается, снова начинается движение вниз. Такой колебательный характер движения вверх–вниз напоминает движение маятника, поэтому устройство и называется маятником Максвелла.

Согласно основным законам динамики поступательного и вращательного движений, пренебрегая силами трения и отклонением нитей от вертикали, запишем:

$$\begin{cases} ma = mg - 2T, & (106.13) \\ I_{zc}\beta = 2Tr, & (106.14) \\ a = \beta r, & (106.15) \end{cases}$$

где m – масса маятника, I_{zc} – момент инерции маятника относительно его оси Z_c, r – радиус намотки нити на стержень, T – сила натяжения каждой из нитей, g – ускорение свободного падения, a – ускорение центра масс маятника, β – угловое ускорение диска.

Эти уравнения применимы как к первой стадии движения маятника вниз, так и к подъёму вверх. Однако кинематические начальные условия для этих стадий различны. На стадии движения вниз начальная скорость равна нулю, при движении вверх она отлична от нуля, т.к. в нижней точке направление поступательного движения практически мгновенно меняется на противоположное. Используя равенства (106.13), (106.14), (106.15), а также кинематический закон равнопеременного движения, можно записать

$$\begin{cases} I_{zc} = \dfrac{m}{a}(g-a)r^2, \qquad \left\{ \text{или } I_{zc} = mr^2\left(\dfrac{g}{a}-1\right) \right\} & (106.16) \\ 2T = m(g-a), & (106.17) \\ a = \dfrac{2h}{\tau^2}, & (106.18) \end{cases}$$

где τ – время движения маятника от начала движения до момента прохождения им нижнего положения, h – смещение оси маятника за это время. При $a << g$ можно записать приблизительные равенства:

$$I_{zc} = \frac{mgr^2}{a}, \tag{106.19}$$

$$2T = mg. \tag{106.20}$$

Момент инерции маятника Максвелла в данной задаче экспериментально определяется косвенным образом. Воспользовавшись равенствами (106.18) и (106.19), получим расчётную упрощённую формулу:

$$I_{zc} = \frac{mgr^2\tau^2}{2h}. \tag{106.21}$$

Отметим, что модуль и направление ускорения и сил натяжения не зависят от того, куда движется маятник – вверх или вниз. Тогда как скорость изменяет свое направление при колебаниях маятника. Высота, на которую поднимется маятник при движении вверх, будет меньше, чем первоначальная. Разность этих высот характеризует убыль механической энергии системы в результате работы неконсервативных сил.

Доля потерянной за цикл механической энергии равна

$$\eta = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{mg(h-h_1)}{mgh} = \frac{\delta h}{h}, \tag{106.22}$$

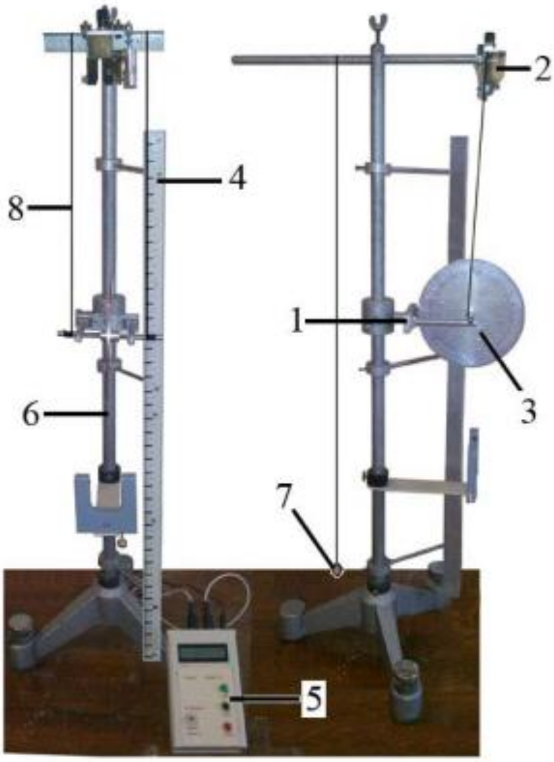
где h – исходная высота, с которой опускается маятник; h_1 – высота, на которую он поднимается после одного цикла колебаний.

3. Экспериментальная установка

Перед началом измерений установка (рис. 106.2) должна быть тщательно отъюстирована. При этом сокращается время, необходимое для проведения измерений, и уменьшается разброс экспериментальных данных.

Рис. 106.2. Экспериментальная установка

1- Опорная вилка
2- Стопорное устройство
3- Диск маятника
4- Шкала
5- Таймер
6- Штатив
7- Отвес
8- Нити маятника



При помощи угольника отмечают на шкале уровень оси маятника в его нижнем положении. После намотки нитей на ось также при помощи угольника отмечают и верхнее положение оси по той же шкале. При аккуратно проведенной юстировке установки после нажатия на кнопку стопора маятник начинает движение вниз без раскачивания; после удара в нижней точке при движении вверх появляется небольшое раскачивание. При движении вниз и вверх ось маятника не должна перекашиваться; нити должны навиваться от отверстий, в которые они продеты, по направлению к диску. Если эти условия нарушаются, необходимо прекратить движение во избежание срыва с нитей и повреждения маятника, а затем повторить опыт.

По окончании измерений ось-стержень маятника вновь укладывается в углубления на опорной вилке, а диск зажимается стопорным устройством.

4. Порядок проведения работы

Все измерения требуют большого внимания и аккуратности. Необходимо следить за маятником, особенно при движении вверх, и оберегать его от механических повреждений. Если наматывание нитей будет происходить несимметрично или будет смещаться к концам стержня, маятник необходимо остановить, поскольку при срыве с нитей его ось-стержень может согнуться и работать с таким маятником станет невозможно.

Упражнение 1. Измерение кинематических характеристик движения маятника

Проведение измерений

1. Определить и записать в стандартной форме высоту h, с которой маятник опускается до удара. Высота h определяется как разность верхнего и нижнего отсчётов по шкале, полученных при помощи угольника во время юстировки.

2. Измерить время τ движения маятника вниз до удара. После установки правильного исходного положения маятника освобождают стопор, одновременно пуская таймер; момент удара фиксирует фотодатчик, и таймер определяет, таким образом, время опускания τ.

3. Определить высоту h_1 и время τ_1 подъёма маятника. Для этого в конце подъёма маятника после удара, в момент его остановки, зажимают пальцами диск и отмечают при натянутых нитях с помощью угольника верхнее положение стержня маятника по шкале; разность этого верхнего и нижнего отсчётов даёт высоту h_1, на которую поднимается маятник.

Измерения величин τ, τ_1 и h_1 проводят не менее пяти раз. Результаты измерений заносятся в табл. 106.1.

Экспериментальные данные Таблица 106.1

Номер опыта, i	h_1, *м*	Δh_i, *м*	τ, *с*	$\Delta\tau$, *с*	τ_1, *с*	$\Delta\tau_1$, *с*
1						
2						
3						
4						
5						
6						
Среднее значение						

Обработка результатов

1. Величины h_1, τ и τ_1 являются результатами прямых измерений, поэтому за оценку истинного значения величин h_1 и τ принимаем их среднее арифметическое значение по всем измерениям. Провести вычисление средних значений величин h_1, τ и τ_1. Результаты вычислений занести в табл. 106.1.

2. Провести оценку погрешностей измеренных величин. В качестве оценки погрешности измерений принимается среднее модулей частных отклонений соответствующей величины от её среднего значения. Необходимо учесть также наличие приборных погрешностей. После чего экспериментальный результат должен быть записан в стандартной форме.

3. Используя равенство (106.18), рассчитать экспериментальные значения ускорений центра масс маятника при движении вниз a и вверх a_1. Оценив погрешности косвенных измерений, записать эти результаты в стандартной форме и сравнить их.

Упражнение 2. Определение момента инерции маятника Максвелла

1. Сделать чертёж устройства маятника (рис. 106.3). Поскольку разные части маятника сделаны из различного материала, то необходимо на чертеже отметить вид материала, из которого изготовлена данная часть маятника. Записать плотности материалов, из которых они изготовлены.

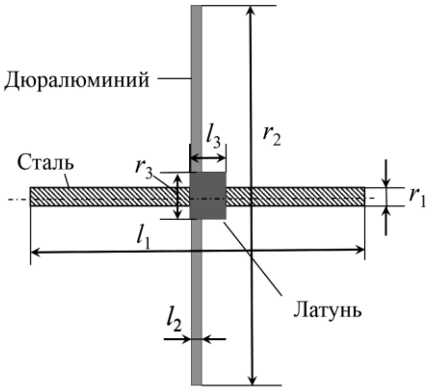


Рис. 106.3. Характерные размеры частей маятника и материалы, из которых они изготовлены.

Определить все характерные размеры маятника и нанести их на чертёж.

2. Провести расчёт массы маятника и определить точность полученного результата:

$$m = m_1 + m_2 + m_3,$$

где m_1, m_2, m_3 – массы стержня, диска и утолщений на стержне соответственно. Массы различных частей маятника вычисляются, исходя из их геометрических размеров и плотностей материалов, из которых они изготовлены.

Записать результат с указанием погрешности.

3. Используя равенство (106.16):

$$I_{zc} = mr^2\left(\frac{g}{a} - 1\right),$$

где r – радиуса стержня, а m – масса маятника, рассчитать экспериментальное значение момента инерции маятника. Провести оценку погрешности косвенных измерений и записать результат в стандартной форме.*)

4. Используя данные о геометрических размерах и массах составных частей маятника, рассчитать теоретическое значение момента инерции $J_{теор}$.

5. Сравнить полученные ранее “экспериментальное” и “теоретическое” значения момента инерции маятника.

Упражнение 3. Определение доли убыли механической энергии

Как и при выполнении большей части упр. 2, здесь осуществляется лишь дополнительная обработка полученных ранее экспериментальных результатов.

---

*) Для упрощения вычисления относительной погрешности можно учесть, что $g/a \gg 1$.

Определить долю убыли механической энергии маятника за одно колебание, исходя из равенства (106.22):

$$\eta = \frac{h - h_1}{h}.$$

Оценить погрешность этого экспериментального результата и записать его в стандартной форме.

5. Основные итоги работы

В результате выполнения работы должны быть определены ускорения маятника Максвелла при его движении вниз и вверх. Кроме того, находят “экспериментальное” и “теоретическое” значения момента инерции маятника. Вычисляется также и доля убыли механической энергии маятника Максвелла за один цикл его колебательного движения. Все результаты должны быть представлены в стандартном виде с указанием погрешности измерения.

Контрольные вопросы

1. Что такое «твёрдое тело»?

2. Какие типы механического движения выделяют при рассмотрении движения твёрдого тела?

3. Что такое «поступательное»/«вращательное» движение твёрдого тела?

4. Что такое момент силы относительно неподвижной точки пространства? Относительно оси, проходящей через эту точку?

5. Что такое момент импульса твёрдого тела относительно неподвижной точки пространства? Относительно оси, проходящей через эту точку?

6. Запишите «уравнение моментов» для системы материальных точек (твёрдого тела) относительно неподвижной в ИСО точки пространства. Относительно оси, проходящей через эту точку.

7. Дайте определение момента инерции твёрдого тела относительно оси.

8. Как связаны момент импульса твёрдого тела относительно неподвижной оси вращения и угловая скорость вращения относительно этой оси?

9. Сформулируйте теорему Гюйгенса – Штейнера.

10. В чём состоит метод определения момента инерции твёрдого тела, который используется в данной работе?

12. Опишите устройство лабораторной установки.

13. Расскажите о порядке выполнения лабораторной работы и проведении измерений.

14. Рассчитайте момент инерции тела по указанию преподавателя.