Задача № 110
(*Лабораторная работа* 2.1)
Изучение вращательного движения твердого тела, имеющего закреплённую ось (Маятник Обербека)

При подготовке к выполнению этой задачи следует ознакомиться с теорией по учебным пособиям:

1. Основная литература. *П.К. Кашкаров, А.В. Зотеев, А.Н. Невзоров, А.А. Склянкин. «Задачи по курсу общей физики с решениями. «Механика. Электричество и магнетизм», М., изд. МГУ, § 1, 3.*

2. Дополнительная литература. *И.В. Савельев. "Курс физики. Том 1. Механика. Молекулярная физика", М., изд. Наука, глава: «Механика твёрдого тела».*

1. Цель работы

Цель данной работы состоит в экспериментальном изучении законов динамики вращательного и поступательного движения твёрдого тела, а также в измерении момента инерции твёрдого тела, исходя из его динамических свойств.

2. Теоретическая часть

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения твёрдого, имеющего закрёпленную ось Z :

$$J_z\beta = N_z\,, \qquad (110.1)$$

где J_z – моментом инерции тела относительно оси Z, $\beta = \dfrac{d\omega}{dt}$ – проекция углового ускорения на эту ось, N_z – сумма проекций моментов внешних сил.

Для экспериментальной проверки этого равенства в работе используется маятник Обербека (рис. 110.1). Он состоит из четырёх стержней А и двух шкивов радиусом R_1 и R_2, закреплённых на одной горизонтальной оси. На каждом из стержней находятся одинаковые грузы массой m' каждый, положение которых можно фиксировать на различных расстояниях от оси. Маятник может приводиться во вращение при помощи груза массой m, подвешенного на конце, намотанной на один из шкивов нити.

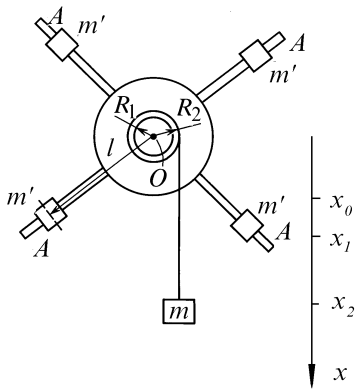

Рис. 110.1. Схематическое изображение маятника Обербека.

Пренебрегая силами трения, а также считая нить невесомой и нерастяжимой, можем написать уравнение вращательного движения маятника:

$$J_z\beta = TR\,, \tag{10.2}$$

уравнение поступательного движения груза, подвешенного на нити

$$ma = mg - T\,, \tag{110.3}$$

а также и уравнение кинематической связи ускорений

$$a = \beta R. \tag{110.4}$$

Здесь R – радиус намотки нити на шкив, T – модуль силы натяжения нити, a – линейное ускорение груза массой m, g – ускорение свободного падения.

Из системы уравнений (110.2)–(110.4) следует, что ускорение груза массой m постоянно и равно

$$a = \frac{mR^2}{J_z + mR^2}\,g\,. \tag{110.5}$$

Основное уравнение динамики вращательного движения (110.2) было записано без учёта момента сил трения $N_{тр}$ в оси маятника. Поэтому для проверки выполнения соотношения (110.1) необходимо убедиться, что $N_{тр}$ можно не учитывать. Это справедливо, если суммарный момент сил трения $N_{тр}$ много меньше момента силы натяжения нити N, который равен:

$$N = TR = m(g-a)R = mgR\frac{J_Z}{J_Z + mR^2}\,.$$

С учётом неравенства $mR^2 << J_Z$ можно записать, что $N \approx mgR$.

Оценим момент сил трения в оси маятника, исходя из энергетических потерь в одном цикле измерений. При опускании груза m с отметки x_0 на полную длину нити до отметки x_3 и при последующем подъёме до отметки x_4 изменение потенциальной энергии груза в поле сил тяжести ΔU будет равно работе сил трения $A_{тр}$ в оси маятника*).

При опускании груза m с отметки x_0 на полную длину нити до отметки x_3 и при последующем подъёме до отметки x_4 изменение потенциальной энергии груза в поле сил тяжести ΔU равно работе сил трения $A_{тр}$ в оси маятника.

Изменение потенциальной энергии ΔU груза равно разности энергии на уровнях x_4 и x_0:

$$\Delta U = mg(x_4 - x_3) - mg(x_0 - x_3) = mg(x_4 - x_0)\,.^{**)} \tag{110.6}$$

Работа сил трения в оси маятника равна

$$A_{тр} = -N_{тр}\cdot\Phi\,, \tag{110.7}$$

где Φ – полный угол поворота маятника Обербека, $N_{тр}$ – модуль момента сил трения.

С учётом (110.6) и (110.7) получим:

---

*) Заметим, что обе величины, конечно же, отрицательны.

**) «Отметки» “x” увеличиваются по направлению вверх.

$$mg(x_4 - x_0) = -N_{\text{тр}} \cdot \Phi . \qquad (110.8)$$

Полный угол поворота маятника Обербека находим из соотношения:

$$R \cdot \Phi = (x_0 - x_3) + (x_4 - x_3) . \qquad (110.9)$$

С учётом (110.9) модуль момента сил трения равен:

$$N_{\text{тр}} = mgR \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - (x_0 + x_4)} . \qquad (110.10)$$

Таким образом, использование основного уравнения динамики вращательного движения (110.1) для расчётов корректно при выполнении следующего условия

$$\frac{N_{\text{тр}}}{mgR} = \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - (x_0 + x_4)} << 1 . \qquad (110.11)$$

3. Экспериментальная установка

Экспериментальная установка (рис. 110.2) состоит из вертикальной *стойки* 1 с закреплёнными на ней двумя подвижными *кронштейнами* 2 и 3, на которых крепятся оптические датчики положения. Кроме того, на стойке закреплены два неподвижных *кронштейна* 4 и 5.

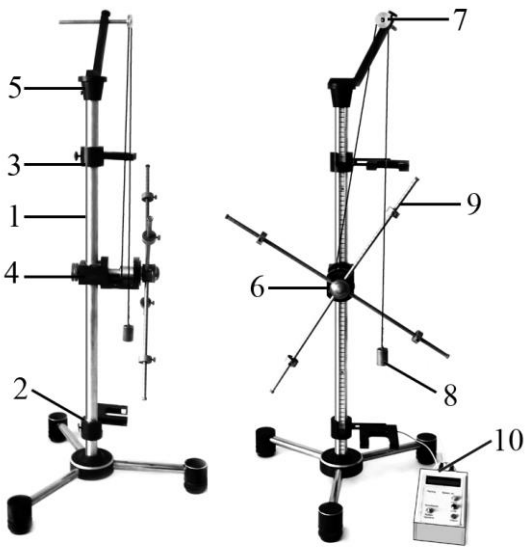

Рис. 110.2. Экспериментальная установка.

На нижнем *кронштейне* 4 закреплён *вал* 6 с двумя шкивами радиусами R_1 и R_2. На верхнем *кронштейне* 5 закреплён *блок* 7. Через блок перекинута нить, один конец которой намотан на шкив *вала* 6, а ко второму концу прикреплен *груз* 8. На валу со шкивами 6 крепится также *тело маятника* 9.

Кронштейны 2 и 3 с фотодатчиками могут крепиться на разной высоте. Расстояние между этими кронштейнами измеряется по шкале, нанесённой на

вертикальную *стойку* 1. Время движения грузов определяют с помощью электронного *таймера* 10. Начало работы *таймера* 10 осуществляется нажатием кнопки «Пуск», остановка – кнопкой «Стоп». При подготовке к дальнейшим измерениям результаты предыдущих измерений убираются с табло таймера нажатием кнопки «Сброс».

4. Порядок проведения работы

Упражнение 1. Проверка законов равнопеременного движения

Как следует из (110.2) – (110.4), вращение маятника Обербека происходит с постоянным угловым ускорением β. При этом груз m опускается (поднимается) с постоянным линейным ускорением a. Координата x груза, отпущенного без начальной скорости с отметки x_0, меняется по закону (ось X системы координат направлена вниз, см. рис. 110.1)

$$x = x_0 + \frac{at^2}{2}. \qquad (110.12)$$

Используя (110.12), определим время τ пролёта груза между двумя отметками, x_1 и x_2 (координаты фотодатчиков). Т.к.

$\left|x_{1,2} - x_0\right| = \dfrac{at_{1,2}^2}{2} \quad \Rightarrow \; t_{1,2} = \sqrt{\dfrac{2}{a}\left|x_{1,2} - x_0\right|}$, $\tau = t_2 - t_1$ получим:

$$\tau = \sqrt{\frac{2}{a}}\left(\sqrt{\left|x_2 - x_0\right|} - \sqrt{\left|x_1 - x_0\right|}\right). \qquad (110.13)$$

Таким образом, при равнопеременном движении (a = const) и фиксированных положениях x_0 и x_2 зависимость времени τ от $\sqrt{\left|x_1 - x_0\right|}$ является линейной и изображается на графике прямой линией.

Измерения

1. Измерить штангенциркулем радиусы шкивов R_1 и R_2, результаты записать в рабочую тетрадь. Записать массу используемого в данном упражнении груза $m = m_1$.
2. Установить кронштейны с фотодатчиками на максимальном расстоянии друг от друга (x_1 и x_2).
3. Зафиксировать грузы m' в среднем положении на равном расстоянии (10 делений) от оси, чтобы маятник находился в положении безразличного равновесия. Начальное положение x_0 груза массой m, также как и координата нижнего фотодатчика x_2 всегда одни и те же, их необходимо записать в рабочий журнал. Нить наматывают на шкив большего диаметра, виток к витку.
4. Отпустить груз из положения x_0 и измерить время τ пролёта груза между фотодатчиками. Данные записать в табл. 110.1. Провести измерения времени τ для нескольких (например, пяти) положений x_1 верхнего датчика (рекомендуется менять

x_1 с шагом 5 *см*). Для каждого положения датчика измерения времени проводят не менее $n = 3$ раз.

5. Для первых 5–7 опытов измерить также значения x_4 – отметки, до которой поднимается груз при вращении маятника в одну сторону. Результаты занести в табл. 110.1.

6. Определить значение x_3 – самой нижней отметки, до которой опускается груз при своем движении.

Экспериментальные данные Таблица 110.1

n	x_1, *мм*	$\sqrt{\lvert x_1 - x_0 \rvert}$, *мм*$^{1/2}$	x_4, *мм*	τ, *с*	$\langle\tau\rangle$, *с*	$\Delta\tau_i$, *с*	$(\langle\tau\rangle \pm \Delta\tau)$, *с*
1							
2							
3							
1							
2							
3							
1							
2							
3							

…

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным для каждого положения верхнего фотодатчика x_1 вычислить среднее значение величины τ. Результаты также записать в табл. 110.1.

2. Построить зависимость τ от $\sqrt{\lvert x_1 - x_0 \rvert}$, которая должна быть линейной. Близость получившейся зависимости к линейной указывает на то, что движение является равнопеременным. Определить из построенному графику угловой коэффициент A. Полученный результат записать в стандартной форме:

$$A = (\langle A \rangle \pm \Delta A) \text{ ед.изм.}$$

3. Согласно (110.13), коэффициент A равен $\sqrt{2/a}$. Определить значение ускорения a. Записать результат экспериментального определения ускорения в стандартной форме:

$$a = (\langle a \rangle \pm \Delta a) \text{ ед.изм.}$$

4. Из равенства (110.5) $a = \dfrac{mR^2}{J_z + mR^2} g$ легко выразить момент инерции маятника. Он равен:

$$J_z = mR^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right).$$

5. По полученному значению ускорения груза вычислить J_z и погрешность

косвенных измерений (считая, что g может быть задано с любой нужной точностью и равно 9,82 *м*/*с*^{2}). Полученный результат записать в стандартной форме:

$$J_z = (\langle J_z \rangle \pm \Delta J_z)\,\text{ед.изм.}$$

6. Вычислить среднее значение x_4. Вычислить величину

$$\xi = \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - (x_0 + x_4)}.$$

Убедиться, что $\xi << 1$, т. е. выполняется неравенство (110.11).

7. По формуле (110.10) вычислить момент сил трения $N_{\text{тр}}$.

Упражнение 2. Проверка независимости момента инерции маятника Обербека от момента внешних сил

В данном упражнении экспериментально проверяется независимость инерционных свойств маятника (момента инерции) от момента внешних сил.

Согласно уравнению (110.1),

$$\frac{N_1}{\beta_1} = \frac{N_2}{\beta_2} = J_Z. \qquad (110.14)$$

Из уравнений (110.5) и (110.13) следует, что:

$$J_Z = mR^2\left(\frac{g\tau^2}{2\left(\sqrt{|x_2 - x_0|} - \sqrt{|x_1 - x_0|}\right)^2} - 1\right). \qquad (110.15)$$

В равенство (110.15) входят величины, определяемые экспериментально.

Измерения

1. Установить максимальное расстояние между кронштейнами с фотодатчиками и записать их координаты фотодатчиков (x_1, x_2), а также значение x_0.

2. Установить грузы m' в среднее положение, на равном расстоянии от оси (10 делений), чтобы маятник находился в положении безразличного равновесия.

3. К концу нити, намотанной на шкив радиусом R_1, прикрепить груз массой $m = m_1$ и измерить время прохождения грузом расстояния между двумя фотодатчиками τ. Измерение повторить $n = 3$ раза, результаты записать в табл. 110.3.

4. Перебросив нить на другой шкив (радиусом R_2), измерить время τ (3 раза). Результаты записать в табл. 110.3.

5. Аналогично провести измерения (пп. 3, 4) с другим грузом массой $m = m_2$*). Результаты измерений занести в таблицу 110.3.

*) Масса m_2 указана на установке.

Экспериментальные данные Таблица 110.3

n	R_i, m_i	τ, c	$\Delta\tau_i$, c	$(\langle\tau\rangle \pm \Delta\tau)$, c	J_z, *ед.изм.*	ΔJ_z, *ед.изм.*
1	R_1, m_1					
2						
3						
1	R_1, m_2					
2						
3						
1	R_2, m_1					
2						
3						
1	R_2, m_2					
2						
3						

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным τ_i вычислить средние значения времени пролёта τ и оценить их погрешности измерений для всех четырёх различных случаев сочетаний R_i, m_i (см. табл. 110.3). Результаты записать в табл. 110.3.

2. По формуле (110.15) рассчитать значения моментов инерции $J_{z1} \div J_{z4}$. В табл. 110.3 записать как сами полученные значения, так и их отклонения от среднего.

3. Проанализировать полученный результат. Для этого отметить значения моментов инерции $J_1 \div J_4$ (с учетом их погрешностей) на числовых осях (рис. 110.3). Если соответствующие интервалы перекрываются, то можно говорить о выполнении соотношения (110.14), т.е. о *независимости инерционных свойств маятника от момента внешних сил.*

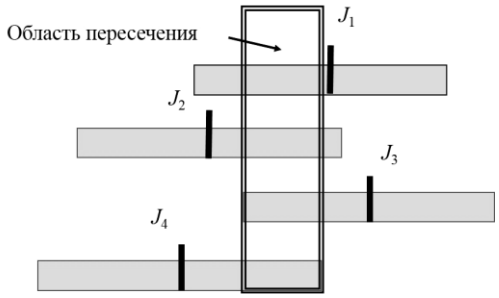

Рис. 110.3. Сравнение моментов инерции

5. Основные итоги работы

В результате работы осуществляется экспериментальная проверка справедливости основного уравнения вращательного движения твёрдого тела – уравнения моментов. Также проверяются независимости момента инерции маятника от момента внешних сил.

6. Контрольные вопросы

1. При каких условиях тело совершает равнопеременное движение?
2. Как направлен вектор угловой скорости? Углового ускорения?
3. Что такое абсолютно твёрдое тело? Сколько степеней свободы имеет абсолютно твёрдое тело?

4. Какие существуют простейшие кинематические типы движения твёрдого тела.

5. Что такое момент силы относительно некоторой точки? Что такое момент силы относительно оси?

6. Что такое момент импульса системы материальных точек и твёрдого тела?

7. Что такое момент инерции тела относительно оси?

8. Сформулируйте теорему Гюйгенса – Штейнера.

9. Запишите уравнение моментов.

10. Запишите основное уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела.