Задача № 110

(*Лабораторная работа* 2.1)

Изучение вращательного движения твердого тела вокруг закрепленной оси

При подготовке к выполнению этой задачи следует ознакомиться с теорией по учебным пособиям:

1. *П.К. Кашкаров, А.В. Зотеев, А.Н. Невзоров, А.А. Склянкин. «Задачи по курсу общей физики с решениями. «Механика. Электричество и магнетизм», М., изд. МГУ, § 3.*
2. *И.В. Савельев. "Курс физики. Том 1. Механика. Молекулярная физика", М., изд. Наука, глава: «Механика твёрдого тела».*

1. Цель работы

Цель данной работы состоит в экспериментальном изучении законов динамики вращательного и поступательного движения твёрдого тела, а также с расчётом момента инерции твёрдого тела для осесимметричных тел.

2. Теоретическая часть

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения твёрдого тела, в случае вращения вокруг закрёпленной оси Z тела (системы тел) с моментом инерции J_Z :

$$J_Z\beta = N_Z\,, \tag{2.1.1}$$

где $\beta = \dfrac{d\omega}{dt}$ – проекция углового ускорения на ось вращения, N_Z – сумма проекций моментов внешних сил на ту же ось.

Для экспериментальной проверки этого соотношения в работе используется маятник Обербека (рис. 2.1.1). Он состоит из четырех стержней А и двух шкивов радиусом R_1 и R_2, закреплённых на одной горизонтальной оси. На каждом из стержней находятся одинаковые грузы массой m' каждый, положение которых можно фиксировать на различных расстояниях от оси. Маятник может приводиться во вращение при помощи груза массой m, подвешенного за конец намотанной на тот или иной шкив нити.

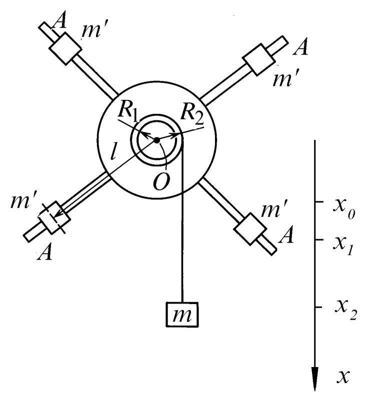

Рис. 2.1.1. Схематическое изображение маятника Обербека.

Пренебрегая силами трения, а также считая нить невесомой и нерастяжимой, можем записать уравнение вращательного движения маятника:

$$J_Z\beta = TR, \tag{2.1.2}$$

уравнение поступательного движения груза на нити

$$ma = mg - T, \tag{2.1.3}$$

и уравнение кинематической связи

$$a = \beta R. \tag{2.1.4}$$

Здесь R – радиус намотки нити на шкив, T – сила натяжения нити, a – линейное ускорение груза массой m, g – ускорение свободного падения.

Из системы уравнений (2.1.2)–(2.1.4) следует, что ускорение груза массой m постоянно и равно

$$a = \frac{mR^2}{J_Z + mR^2} g. \tag{2.1.5}$$

Основное уравнение вращательного движения (2.1.2) было записано без учёта момента сил трения $N_{\text{тр}}$ в оси маятника. Поэтому для проверки выполнения соотношения (2.1.1) необходимо убедиться, что $N_{\text{тр}}$ можно не учитывать, если суммарный момент сил трения $N_{\text{тр}}$ много меньше момента силы натяжения нити N, который равен:

$$N = TR = m(g-a)R = mgR\frac{J_Z}{J_Z + mR^2}.$$

С учётом неравенства $mR^2 << J_Z$ можно записать, что $N \approx mgR$.

Оценим момент сил трения в оси маятника, полагая, что он не изменяется во время движения. При опускании груза m с отметки x_0 на полную длину нити до отметки x_2 и при последующем подъёме до отметки x_1 изменение потенциальной энергии груза в поле сил тяжести ΔU будет равно работе сил трения $A_{\text{тр}}$ в оси маятника.

Изменение потенциальной энергии ΔU груза равно разности энергии на уровнях x_4 и x_0:

$$\Delta U = mgx_1 - mgx_0 = mg(x_1 - x_0). \tag{2.1.6}$$

Работа сил трения в оси маятника равна

$$A_{\text{тр}} = N_{\text{тр}} \cdot \Phi, \tag{2.1.7}$$

где Φ – полный угол поворота маятника Обербека.

С учётом (2.1.6) и (2.1.7) получим:

$$mg(x_1 - x_0) = N_{\text{тр}} \cdot \Phi. \tag{2.1.8}$$

Полный угол поворота маятника Обербека находим из соотношения:

$$R \cdot \Phi = (x_2 - x_0) + (x_2 - x_1). \tag{2.1.9}$$

С учетом (2.1.9) формулу (2.1.8) можно переписать в следующем виде:

$$N_{\text{тр}} = mgR\frac{x_1 - x_0}{2x_2 - (x_0 + x_1)}. \tag{2.1.10}$$

Таким образом, использование основного уравнения вращательного движения (2.1.1) для расчётов корректно при выполнении следующего условия

$$\frac{N_{\text{тр}}}{mgR} = \frac{x_1 - x_0}{2x_2 - (x_0 + x_1)} << 1. \qquad (2.1.11)$$

3. Экспериментальная установка

Установка для изучения вращательного движения (рис. 2.1.2) состоит из вертикальной *стойки* 1 с закреплёнными на ней двумя подвижными *кронштейнами*

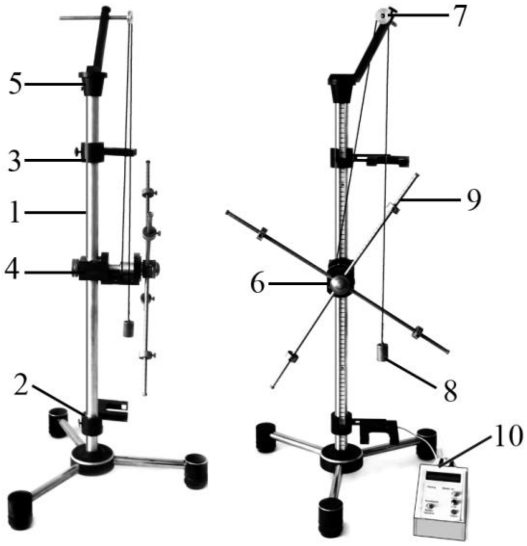

Рис. 2.1.2. Экспериментальная установка для изучения вращательного движения твердого тела.

2 и 3, на которых крепятся оптические датчики положения. Кроме того, на стойке закреплены два неподвижных *кронштейна* 4 и 5.

На нижнем *кронштейне* 4 закреплён *вал* 6 с двумя шкивами радиусами R_1 и R_2. На верхнем *кронштейне* 5 закреплён *блок* 7. Через блок перекинута нить, один конец которой намотан на двухступенчатый *вал* 6, а ко второму концу прикреплен *груз* 8. На двухступенчатом валу крепится *тело маятника* 9.

Кронштейны 2 и 3 с фотодатчиками могут крепиться на разной высоте. Расстояние между этими кронштейнами измеряется по шкале, нанесённой на вертикальную *стойку* 1. Время движения грузов определяют с помощью электронного *таймера* 10. Начало работы *таймера* 10 осуществляется нажатием кнопки «Пуск», остановка – кнопкой «Стоп». При подготовке к дальнейшим измерениям результаты предыдущих измерений убираются с табло таймера нажатием кнопки «Сброс».

4. Порядок проведения работы

Упражнение 1. Проверка уравнения вращательного движения

Как следует из (2.1.2) – (2.1.4), вращение маятника Обербека происходит с постоянным угловым ускорением β. При этом груз m опускается (поднимается) с постоянным линейным ускорением a. Координата x груза, отпущенного без начальной скорости с отметки x_0, меняется по закону (ось X системы координат направлена вниз, см. рис. 2.1.1)

$$x = x_0 + \frac{at^2}{2}. \tag{2.1.12}$$

Используя (2.1.12), определим время τ пролёта груза между двумя отметками, x_3 и x_4 (координаты фотодатчиков):

$$\tau = \sqrt{\frac{2}{a}}\left(\sqrt{x_4 - x_0} - \sqrt{x_3 - x_0}\right). \tag{2.1.13}$$

Таким образом, при равнопеременном движении (a = const) и фиксированных положениях x_0 и x_4 зависимость времени τ от $\sqrt{x_3 - x_0}$ является линейной и изображается на графике прямой линией.

Измерения

1. Измерить штангенциркулем радиусы шкивов R_1 и R_2, результаты записать в рабочую тетрадь. Записать массу используемого в данном упражнении груза $m = m_1$.
2. Установить кронштейны с фотодатчиками на максимальном расстоянии друг от друга (x_3 и x_4).
3. Зафиксировать грузы m' в среднем положении на равном расстоянии (10 делений) от оси, чтобы маятник находился в положении безразличного равновесия. Начальное положение x_0 груза массой m, также как и координата нижнего фотодатчика x_4 всегда одни и те же, их необходимо записать в рабочий журнал. Нить наматывают на шкив большего диаметра, виток к витку.
4. Отпустить груз из положения x_0 и измерить время τ пролёта груза между фотодатчиками. Данные записать в табл. 2.1.1. Провести измерения времени τ для нескольких (например, пяти) положений x_3 верхнего датчика (рекомендуется менять x_3 с шагом 5 *см*). Для каждого положения датчика измерения времени проводят не менее $k = 3$ раз.
5. Для первых 5–7 опытов измерить также значения x_1 – отметки, до которой поднимается груз при вращении маятника в одну сторону. Результаты занести в табл. 2.1.1.
6. Определить значение x_2 – самой нижней отметки, до которой опускается груз при своем движении.

Экспериментальные данные Таблица 2.1.1

k	x_3, *мм*	$\sqrt{x_3 - x_0}$, *мм*$^{1/2}$	x_1, *мм*	τ, *с*	$\Delta\tau$, *с*
1					
2					
3					
1					
2					
3					

1					
2					
3					

…

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным для каждого положения верхнего фотодатчика x_3 вычислить среднее значение величины τ. Результаты также записать в табл. 2.1.1.

2. Построить зависимость τ от $\sqrt{x_3 - x_0}$ и вычислить, исходя из неё, угловой коэффициент А. Полученный результат записать в стандартной форме.

3. Согласно (2.1.13), коэффициент A равен $\sqrt{2/a}$. Определить значение ускорения a и оценить погрешность косвенных измерений. Записать результат экспериментального определения ускорения в стандартной форме:

$$a = \left(\langle a \rangle \pm \Delta a\right) \text{ ед.изм.}$$

4. Как следует из формулы (2.1.5), момент инерции маятника равен

$$J_Z = mR^2\left(\frac{g}{a} - 1\right).$$

Вычислить J_Z и погрешность косвенных измерений (считая, что g может быть задано с любой нужной точностью и равно 9,82 $м/с^2$).

5. Вычислить среднее значение x_1. Определить величину

$$\xi = \frac{x_1 - x_0}{2x_2 - (x_0 + x_1)}.$$

Убедиться, что $\xi << 1$, т. е. выполняется неравенство (2.1.11).

6. По формуле (2.1.10) вычислить момент сил трения $N_{тр}$ и оценить её погрешность, как погрешность при косвенных измерениях. Результаты для момента инерции и момента сил трения представить в стандартной форме.

Упражнение 2. Проверка независимости момента инерции маятника от момента внешних сил

В данном упражнении экспериментально проверяется независимость инерционных свойств маятника (момента инерции) от момента внешних сил.

Согласно уравнению (2.1.1),

$$\frac{N_1}{\beta_1} = \frac{N_2}{\beta_2} = J_Z. \qquad (2.1.14)$$

Из уравнений (2.1.5) и (2.1.13) следует, что:

$$J_Z = mR^2\left(\frac{gt^2}{2\left(\sqrt{x_4 - x_0} - \sqrt{x_3 - x_0}\right)^2} - 1\right). \tag{2.1.15}$$

В формулу (2.1.15) входят величины, определяемые экспериментально.

Измерения

1. Установить максимальное расстояние между кронштейнами с фотодатчиками и записать их координаты фотодатчиков (x_3, x_4), а также значение x_0.

2. Установить грузы m' в среднее положение, на равном расстоянии от оси (10 делений), чтобы маятник находился в положении безразличного равновесия.

3. К концу нити, намотанной на шкив радиусом R_1, прикрепить груз массой m и измерить время прохождения грузом расстояния между двумя фотодатчиками τ. Измерение повторить $k = 3$ раза, результаты записать в табл. 2.1.3.

4. Перебросив нить на другой шкив (радиусом R_2), измерить время τ (3 раза). Результаты записать в табл. 2.1.3.

5. Аналогично провести измерения (пп. 3, 4) с другим грузом массой $m = m_2$[*)]. Результаты измерений занести в таблицу 2.1.3.

Экспериментальные данные Таблица 2.1.3

k	R_i, m_i	τ, *с*	$\Delta\tau$, *с*	$(\langle\tau\rangle \pm \Delta\tau)$, *с*	J_Z, *ед.изм.*
1	R_1, m_1				
2					
3					
1	R_1, m_2				
2					
3					
1	R_2, m_1				
2					
3					
1	R_2, m_2				
2					
3					

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным вычислить средние значения времени пролёта τ и оценить их погрешности для всех четырёх различных случаев сочетаний R_i, m_i (см. табл. 2.1.3). Результаты записать в табл. 2.1.3.

2. По формуле (2.1.15) рассчитать значения моментов инерции $J_{Z1} \div J_{Z4}$.

3. Провести оценку погрешностей J_{Zi} и записать результаты 4-х разных опытов по экспериментальному определению момента инерции маятника в стандартной форме.

[*)] Масса m_2 указана на установке.

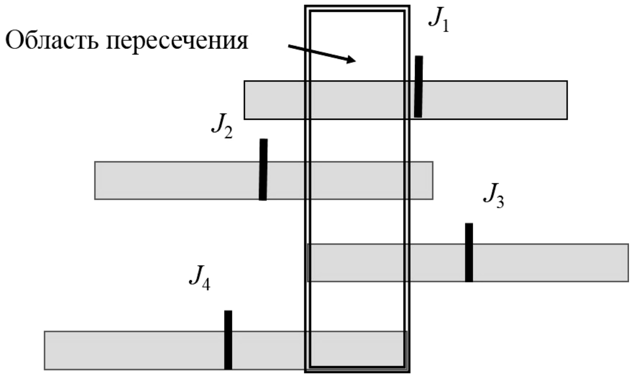

Рис. 2.1.3. Сравнение моментов инерции между собой для четырех опытов

4. Проанализировать полученный результат. Для этого отметить значения моментов инерции $J_1 \div J_4$ (с учетом их погрешностей) на числовых осях (рис. 2.1.3). Если соответствующие интервалы перекрываются, то можно говорить о выполнении соотношения (2.1.14), т.е. о *независимости инерционных свойств маятника от момента внешних сил.*

5. Основные итоги работы

В результате работы осуществляется экспериментальная проверка справедливости основного уравнения вращательного движения твёрдого тела – уравнения моментов. Также проверяются независимости момента инерции маятника от момента внешних сил.

6. Контрольные вопросы

1. Что такое абсолютно твёрдое тело? Сколько степеней свободы имеет абсолютно твёрдое тело? Сколько независимых скалярных уравнений необходимо для описания движения твёрдого тела?
2. Как направлен вектор угловой скорости? Углового ускорения?
3. Что такое момент силы относительно некоторой точки? Что такое момент силы относительно оси?
4. Что такое момент импульса тела, системы тел?
5. Что такое момент инерции тела относительно оси?
6. Теорема Гюйгенса – Штейнера.
7. Запишите уравнение моментов относительно неподвижной оси.