

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛ И ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНЕРА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ.

Целью работы является определение момента инерции тел и проверка теоремы о параллельных осях методом крутильных колебаний.

Дополнительная теория эксперимента.



Рис.1

Если для однородных тел простой формы момент инерции можно без особых затруднений вычислить теоретически, т.е. по определению, то для тел сложной формы или с неравномерным распределением массы прямой теоретический расчет может оказаться сложным и даже практически неосуществимым. Поэтому большой интерес представляют экспериментальные методы определения момента инерции. Один из них - метод крутильных колебаний трифилярного подвеса - изучается в настоящей задаче.

Трифилярный подвес представляет собой круглую платформу, подвешенную на трех нитях к неподвижному диску меньшего радиуса (рис.1). Если платформу, пустую или с грузом, повернуть на малый угол вокруг вертикальной оси и отпустить, то она будет совершать движение,

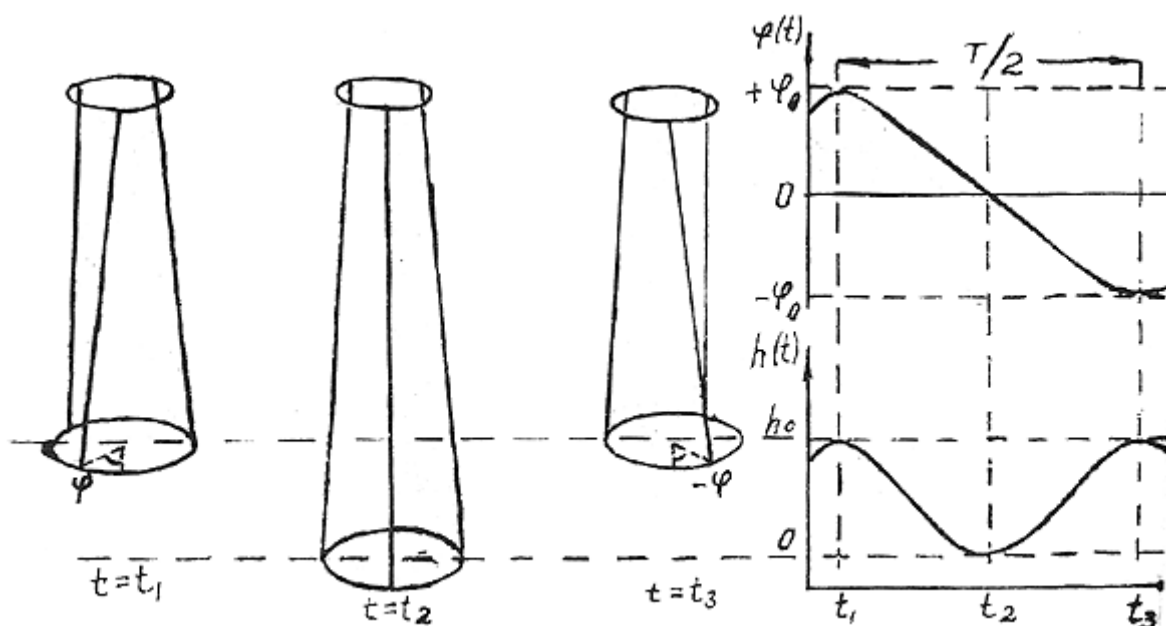


Рис.2

представляющее собой два одновременно происходящих колебания: колебание "вверх-вниз" в вертикальном направлении и крутильное колебание относительно вертикальной оси симметрии подвеса. Легко видеть, что период T крутильных колебаний вдвое больше периода вертикальных колебаний (рис.2): за один и тот

же промежуток времени $(t_3 - t_1)$ подвес совершит половину крутильного колебания (пройдя из положения с максимальным углом отклонения $+\varphi_0$ в положение с максимальным по модулю углом отклонения $-\varphi_0$ в противоположном направлении) и одновременно целое колебание в вертикальном направлении (из наивысшего положения с $h = h_0$ через наинизшее положение с $h = 0$ снова в наивысшее положение).

Выведем формулу, связывающую момент инерции системы "платформа + груз" с периодом крутильных колебаний. Сначала воспользуемся законом сохранения механической энергии. На систему "платформа + груз" действуют силы тяжести, силы натяжения нитей и силы трения. Силы тяжести консервативны; работа сил натяжения равна нулю, так как сила натяжения перпендикулярна направлению движения точки ее приложения, т.е. точки закрепления нити на платформе; силами трения ввиду их малости пренебрегаем. Поэтому, согласно закону изменения и сохранения механической энергии, механическая энергия рассматриваемой системы должна сохраняться.

В тот момент (t_1 на рис.2), когда платформа находится в наивысшем положении, система обладает потенциальной энергией

$$E_{nom}^1 = mgh_0,$$

где m - масса системы и g - ускорение свободного падения, в то время как ее кинетическая энергия $E_{кин}^{(1)} = 0$, так как в этот момент система останавливается. В другой момент времени, когда система проходит положение равновесия (t_2 на рис.2), наоборот, $E_{nom}^{(2)} = 0$, так как $h(t_2) = 0$, в то время как кинетическая энергия системы

$$E_{кин}^2 = \frac{J\omega_0^2}{2}$$

где J - момент инерции системы относительно оси вращения, а ω_0 - ее угловая скорость в момент прохождения положения равновесия.

Приравнявая по закону сохранения механической энергии значения полной механической энергии в моменты t_1 , и t_2 , имеем

$$mgh_0 = \frac{J\omega_0^2}{2} \quad (1)$$

Выразим теперь угловую скорость ω_0 через максимальный угол отклонения φ_0 . Считая крутильные колебания гармоническими, имеем

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right)$$

где φ_0 - амплитуда, T - период и α - начальная фаза.

Угловая скорость ω , согласно определению, выразится так:

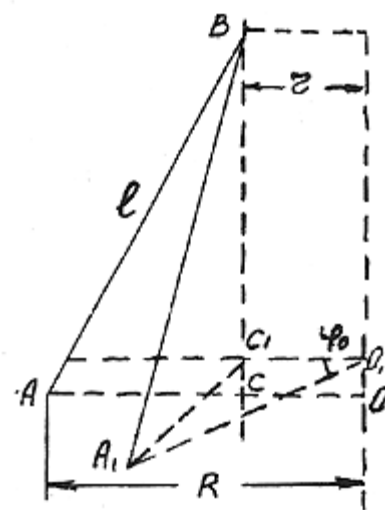


Рис.3

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_0 \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right)$$

Из последней формулы, полагая $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right) = 1$, для максимального значения ω имеем:

$$\omega_0 = \varphi_0 \frac{2\pi}{T}$$

Подставляя это выражение в формулу (1), получим

$$mgh_0 = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \left(\frac{2\pi\varphi_0}{T}\right)^2 \quad (2)$$

Наконец, найдем связь между величинами h_0 и φ_0 в формуле (2). На рис. 3 изображены положения точки закрепления нити в момент прохождения положения равновесия (A) и в момент максимального подъема (A_1). Здесь $R = AO = A_1O_1$ - радиус платформы; $r = C_1O_1$ - радиус верхнего диска; $l = AB = A_1B$ - длина нити; $h_0 = OO_1 = CC_1$ - максимальная высота подъема; φ_0 - максимальный угол поворота. Как видно из рисунка, $h_0 = CC_1 = BC - BC_1$. Используем формулу для разности квадратов:

$$h_0 = BC - BC_1 = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1}. \quad (3)$$

Входящие сюда величины легко вычислить: $(BC)^2$ найдем по теореме Пифагора из треугольника ABC

$$(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = l^2 - (R - r)^2, \quad (4)$$

$(BC_1)^2$ выразим по теореме Пифагора из $\triangle A_1BC_1$, используя также теорему косинусов для стороны A_1C_1 треугольника $A_1C_1O_1$

$$(BC_1)^2 = (A_1B)^2 - (A_1C_1)^2 = l^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi_0). \quad (5)$$

При малых углах отклонения и при условии $R \sim r$ выражение в знаменателе формулы (3)

$$BC + BC_1 \sim 2l. \quad (6)$$

Подставляя полученные выражения (4)-(6) в формулу (3), имеем:

$$h = \frac{2 Rr(1 - \cos(\varphi_0))}{2l} = \frac{2 Rr \sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)}{l}$$

Так как для малых углов $\sin(\alpha) \approx \alpha$, то $\sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \approx \frac{\varphi_0^2}{4}$, так что

$$h_0 = \frac{Rr \varphi_0^2}{2l} \quad (7)$$

Подставляя соотношение (7) в формулу (2), получим:

$$mg \frac{Rr \varphi_0^2}{2l} = \frac{1}{2} J \frac{4 \pi^2 \varphi_0^2}{T^2}$$

откуда

$$J = \frac{mgRr}{4 \pi^2 l} T^2 \quad (8)$$

По этой формуле, зная соответствующие параметры системы и измерив период колебаний, можно вычислить моменты инерции.

Упражнение 1.

Определение момента инерции пустой платформы.

Предварительно успокоив платформу, сообщают ей слабый вращательный импульс, слегка дернув за веревку, прикрепленную к верхнему диску. Амплитуда возникших крутильных колебаний должна быть столь малой, чтобы максимальное отклонение точки закрепления нити в каждую сторону не превышало 1 см, поскольку при больших амплитудах колебания могут существенно отличаться от гармонических. Кроме того, следует по возможности избегать поперечных колебаний платформы.

Система измерения времени включает в себя электронный таймер с фотодатчиком, укрепленным на подставке. При проведении измерений датчик устанавливается в удобное положение. Запуск таймера осуществляется нажатием кнопки «Пуск», остановка — кнопкой «Стоп». При подготовке к дальнейшим измерениям результаты предыдущих убираются с табло таймера нажатием кнопки «Сброс».

В один из моментов, соответствующих максимальному отклонению платформы от положения равновесия, включают секундомер и измеряют время t двадцати полных колебаний. Чтобы исключить возможную ошибку в счете числа колебаний, опыт повторяют пять раз, добиваясь того, чтобы измеренные значения времени t отличались друг от друга не более, чем на (0,2-0,4) с.

Чтобы избежать вычисления периода колебаний и упростить процедуру оценки погрешности, целесообразно ввести в формулу (8) вместо периода T непосредственно измеряемое время t ($T = t/20$)

$$J_{пл} = \frac{mgRrt^2}{1600\pi^2 l}$$

Подставляя сюда в единицах СИ среднее значение t и других величин, входящих в формулу (указаны в табличке на столе), вычисляют момент инерции платформы $J_{пл}$. Оценив погрешности, записывают окончательный результат:

$$J_{пл} = (J_{сред} \pm \Delta J) \text{ кг} \cdot \text{м}^2 ; \quad \frac{\Delta J}{J_{сред}} = \dots \%$$

Упражнение 2.

Определение момента инерции цилиндра относительно его оси.

Два одинаковых цилиндра массой M каждый располагают на платформе один на другом так, чтобы их оси совпадали с осью симметрии платформы — для этой цели на платформе нанесена система концентрических окружностей.

Формула (8а), где в качестве массы системы теперь следует взять сумму масс ($m + 2M$) платформы m и двух цилиндров $2M$, определит момент инерции всей системы, т.е. сумму момента инерции платформы $J_{пл}$ и двух одинаковых моментов инерции J_0 цилиндров относительно их осей

$$J_{пл} + 2J_0 = \frac{(m+2M)gRrt^2}{1600\pi^2 l}$$

Отсюда для искомого момента инерции цилиндра относительно его оси имеем:

$$J_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{(m+2M)gRrt^2}{1600\pi^2 l} - J_{пл} \right] \quad (86)$$

Суммарная масса двух цилиндров $2M$ определяется взвешиванием. Время t двадцати колебаний системы измеряется так же, как в упражнении 1.

Оценив погрешности, представляют окончательный результат в виде

$$J_0 = (J_{сред} \pm \Delta J) \text{ кг} \cdot \text{м}^2 ; \quad \frac{\Delta J}{J_{сред}} = \dots \%$$

Рекомендуется также, измерив диаметр цилиндра D , рассчитать момент инерции цилиндра по теоретической формуле $J_{цил} = \frac{m}{2} \left(\frac{D}{2} \right)^2$ и результаты сопоставить.

Упражнение 3.

Проверка теоремы о параллельных осях.

Располагают цилиндры по обе стороны от оси платформы так, чтобы их центры находились на одной прямой с центром платформы на одинаковых расстояниях от него (рис.4). Определяют расстояние d от оси цилиндров до оси вращения:

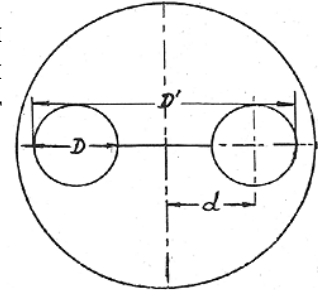


Рис.4

$$d = \frac{D' - D}{2}$$

где D - диаметр цилиндра, а D' - расстояние между максимально удаленными друг от друга точками цилиндров.

Диаметр D измеряется штангенциркулем, расстояние D' - линейкой.

Точно так же, как в предыдущем упражнении, измеряют в пяти опытах время t двадцати колебаний системы и по формуле (8б) вычисляют момент инерции $J_{\text{эксп}}$ цилиндра относительно оси, параллельной оси цилиндра и отстоящей на расстоянии d от нее.

Затем рассчитывают тот же момент инерции теоретически, пользуясь теоремой о параллельных осях:

$$J_{\text{теор}} = J_0 + Md^2$$

Входящие сюда масса цилиндра M и расстояние d измерены ранее, а момент инерции J_0 цилиндра относительно его оси вычислен в упражнении 2.

Оценив погрешности для обоих способов, сопоставляют результаты:

$$J_{\text{эксп}} = (J_{\text{сред}} \pm \Delta J) \text{ кг} \cdot \text{м}^2 ; \quad \frac{\Delta J}{J_{\text{сред}}} = \dots \%$$

$$J_{\text{теор}} = (J_{\text{сред}} \pm \Delta J) \text{ кг} \cdot \text{м}^2 ; \quad \frac{\Delta J}{J_{\text{сред}}} = \dots \%$$

Упражнение 4.

Определение момента инерции квадратной пластинки относительно её центра.

Располагая квадратную пластинку на платформе так, чтобы ось симметрии подвеса проходила через точку пересечения диагоналей квадрата (см. рис.5). Определяют его момент инерции $J_{\text{квад}}$ относительно этой оси тем же способом, каким определялся момент инерции цилиндра в упражнении 2, по формуле:

$$J_{\text{квад}} = \frac{(m + M_{\text{квад}})gRrt^2}{1600\pi^2 l} - J_{\text{пл}} .$$

Масса квадратной пластинки $M_{\text{квад}}$ определяется взвешиванием. Сторона квадрата a измеряется с помощью линейки.

Затем рассчитывают тот же момент инерции теоретически, пользуясь формулой:

$$J_{\text{квад. теор.}} = \frac{M_{\text{квад}} a^2}{6} .$$

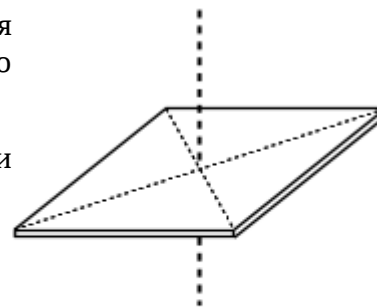


Рис. 5

Оценивают погрешности, результаты упражнения представляют в виде:

$$J_{\text{квад}} = (J_{\text{сред}} \pm \Delta J) \text{ кг} \cdot \text{м}^2 ; \frac{\Delta J}{J_{\text{сред}}} = \dots \% .$$

$$J_{\text{квад. теор.}} = (J_{\text{сред}} \pm \Delta J) \text{ кг} \cdot \text{м}^2 ; \frac{\Delta J}{J_{\text{сред}}} = \dots \% .$$

Литература:

1. Савельев И.В. Курс физики, т.1. М.: Наука, 1989. §§ 26, 27, 31, 32, 33.
2. Кашкаров П.К., Ефимова А.И. М.: Изд-во Московского университета, 2010.