

## Задача № 113 (Лабораторная работа 2.4)

### Определение момента инерции колеса

При подготовке к выполнению этой задачи следует ознакомиться с теорией по учебным пособиям:

1. П.К. Кашкаров, А.В. Зотеев, А.Н. Невзоров, А.А. Склянкин. «Задачи по курсу общей физики с решениями. [«Механика. Электричество и магнетизм»](#), М., изд. МГУ, § 3.
2. И.В. Савельев. "Курс физики. Том 1. Механика. Молекулярная физика", М., изд. Наука, глава: «Механика твёрдого тела» .

#### 1. Цель работы

Цель данной работы состоит в экспериментальном изучении законов динамики вращательного и поступательного движения твёрдого тела, а также в знакомстве со способами определения момента инерции твёрдого тела.

#### Идея эксперимента

В работе используются два способа экспериментального определения момента инерции. Первый основан на использовании зависимости периода колебаний физического маятника от его момента инерции. Второй – на анализе инерционных свойств твёрдого тела, закреплённого на оси, при его вращательном движении. Кроме того, предлагается провести прямой расчёт момента инерции исследуемого тела известной геометрии.

#### 2. Теоретическая часть

Уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела, закреплённого на оси, имеет вид

$$I_z \beta = N_z, \quad (113.1)$$

где  $J_z$  – момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения  $Z$ ,  $\beta$  и  $N_z$  – проекция его углового ускорения и момента внешних сил, приложенных к телу на эту ось соответственно.

Момент инерции относительно какой-либо оси  $Z$  определяется пространственным распределением массы тела относительно этой оси. В частности, для тела, состоящего из конечного числа малых элементов с массами масс  $\Delta m_i$

$$I_z = \sum_i \Delta m_i R_i^2, \quad (113.2)$$

где  $R_i$  – расстояние от элемента тела с массой  $\Delta m_i$  до оси  $Z$ . В общем случае, для сплошных тел, суммирование заменяется интегрированием:

$$I_z = \int R^2 dm, \quad (113.2,a)$$

Для некоторых тел простой формы, возможен прямой расчёт момента инерции. При сложной форме тела и неравномерном распределении его массы аналитический расчёт момента инерции может стать достаточно сложной задачей.

В данной работе применяются два способа экспериментального определения момента инерции: с помощью измерения периода колебаний физического маятника, составной частью которого является исследуемое тело, и с помощью измерений кинематических характеристик при равноускоренном вращательном движении этого тела.

### Определение момента инерции твёрдого тела на основе анализа его колебаний как физического маятника

Если закрепить исследуемое тело А на горизонтальной оси Z, проходящей через центр тяжести (рис. 113.1), то момент сил тяготения будет равен нулю, и тело остается в состоянии безразличного равновесия. Если теперь закрепить на исследуемом теле на некотором удалении L от оси малое тело В с известной массой m, то равновесие перестанет быть безразличным – если тело В не находится на одной вертикали с центром тяжести, то возникает момент силы тяжести, стремящейся вернуть систему в положение равновесия. Такая система представляет собой физический маятник.

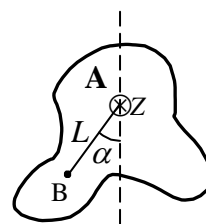


Рис. 113.1. Схематическое представление физического маятника

Уравнение динамики вращательного движения маятника имеет вид

$$(I_Z + I_B) \cdot \beta = -mgL \cdot \sin \alpha \quad (113.3)$$

$$\text{или} \quad (I_Z + I_B) \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mgL \cdot \sin \alpha, \quad (113.3,a)$$

где  $I_Z$ ,  $I_B$  – моменты инерции твёрдого тела А и дополнительного грузика В относительно оси Z,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\alpha$  – угол отклонения тела от положения равновесия,  $\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \beta$  – его угловое ускорение.

Если углы отклонения малы ( $\alpha \leq 10^\circ$ ), то  $\sin \alpha \approx \alpha$  и можно записать

$$(I_Z + I_B) \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + mgL \cdot \alpha = 0, \quad (113.4)$$

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mgL}{J_Z + J_B} \cdot \alpha = 0 \quad \text{или} \quad (113.4,a)$$

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \alpha = 0. \quad (113.5)$$

Данное уравнение является уравнением свободных (собственных) гармонических колебаний. Легко убедиться подстановкой, что его решение имеет вид

$$\alpha(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (113.5)$$

где  $A$  – амплитуда,  $\varphi_0$  – начальная фаза этих колебаний.

Коэффициент в уравнении (113.4,а)

$$\omega_0^2 = \frac{mgL}{I_z + I_B} \quad (113.7)$$

играет роль квадрата частоты (циклической) свободных (собственных) незатухающих колебаний. Период этих колебаний связан с частотой известным соотношением  $T = 2\pi/\omega_0$ .

В связи с тем, что размеры малого тела В во много раз меньше расстояния  $L$  до оси  $Z$ , можно считать его материальной точкой и считать

$$I_B = mL^2. \quad (113.8)$$

Тогда из уравнений (113.7) и (113.8) момент инерции тела А равен:

$$I_z = mL \left( \frac{gT^2}{4\pi^2} - L \right). \quad (113.9)$$

Таким образом, для определения момента инерции твёрдого тела  $I_z$  можно закрепить его на оси, проходящей через центр масс, установить на нём добавочное малое тело с известной массой, измерить период колебаний и, зная расстояние  $L$ , по расчётной формуле (113.9) определить неизвестный момент инерции.

Отметим, что при выводе соотношения (113.9) не учитывалось влияние момента сил трения  $N_{тр}$  в оси закрепления маятника.

Это приближение обусловлено тем, что при достаточно малых величинах  $N_{тр}$  наличие трения приводит прежде всего к постепенному уменьшению амплитуды колебаний и мало влияет на их период.

### Определение момента инерции твёрдого тела на основе анализа его равноускоренного вращательного движения

Рассмотрим, как и в предыдущем случае, тело А, закреплённое на оси  $Z$ , проходящей через центр масс (рис. 113.2). Соосно с телом закреплён цилиндр С, на который наматывается нить с прикреплённым к ней грузом В.

Под действием силы тяжести груз будет опускаться, приводя исследуемое тело А во вращение. Уравнение движения груза В, уравнение вращательного движения тела А и уравнение кинематической связи ускорений имеют вид:

$$ma = mg - T, \quad (113.10)$$

$$I_z \beta = Tr - N_{тр}, \quad (113.11)$$

$$a = \beta r, \quad (113.12)$$

где  $m$  – масса груза В,  $a$  – его линейное ускорение,  $I_z$  – момент инерции исследуемого тела вместе с цилиндром С относительно оси  $Z$ ,  $\beta$  –

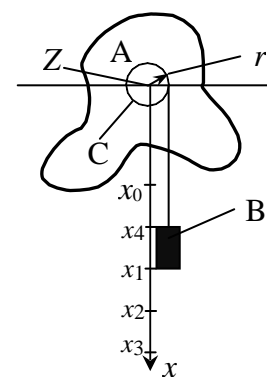


Рис.113.2. Схематическое представление твёрдого тела, закреплённого на оси и вращающегося под действием груза В.

его угловое ускорение,  $g$  – ускорение свободного падения,  $T$  – натяжение нити,  $r$  – радиус цилиндра, на который намотана нить,  $N_{\text{тр}}$  – момент сил трения.

Из данной системы уравнений нетрудно выразить интересующую нас величину:

$$I_z = mr^2 \left( \frac{g}{a} - 1 \right) - \frac{N_{\text{тр}} r}{a}, \quad (113.13)$$

Таким образом, для экспериментального определения момента инерции исследуемого тела необходимо измерить линейное ускорение груза  $B$  и момент сил трения в оси.

Предположим, что груз начинает опускаться из положения  $x_0 = 0$ , а время прохождения им расстояния между двумя точками с координатами  $x_1$  и  $x_2$  равно  $\tau$ . Так как движение груза на участке  $x_1 - x_2$  равноускоренное, то

$$x_1 = x_0 + \frac{at_1^2}{2}, \quad (113.14)$$

$$x_2 = x_0 + \frac{a(t_1 + \tau)^2}{2}, \quad (113.15)$$

где  $t_1$  – время прохождения участка  $x_1 - x_0$ ,  $\tau$  – время прохождения участка  $x_2 - x_1$ .

Из (113.14) и (113.15) следует, что

$$\tau = \sqrt{\frac{2}{a}} (\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0}), \quad (113.16)$$

откуда находим

$$a = 2 \frac{(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2}{\tau^2}. \quad (113.17)$$

Таким образом, для определения ускорения  $a$  нужны данные о  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  и времени  $\tau$  прохождения грузом расстояния между точками с координатами  $x_1$  и  $x_2$ .

Рассмотрим теперь, как можно оценить момент сил трения.

При опускании груза с отметки  $x_0$  на полную длину нити (до отметки  $x_3$ ) его потенциальная энергия в поле силы тяжести переходит в кинетическую и в некоторое количество тепловой энергии, равное по величине работе сил трения:

$$mg(x_3 - x_0) = E_k + N_{\text{тр}} \cdot \Phi, \quad (113.18)$$

где  $\Phi$  – полный угол поворота тела,  $E_k$  – кинетическая энергия системы в момент прохождения телом нижней точки. Предполагается, что момент силы трения при движении остается постоянным, т.е. не зависит от скорости.

После того как груз опустится на полную длину нити до отметки  $x_3$ , тело  $A$  будет продолжать вращаться, и нить начнёт наматываться на цилиндр. В результате груз поднимется до отметки с координатой  $x_4$ . Очевидно, что

$$E_k = mg(x_3 - x_4) + N_{\text{тр}} \cdot \Phi_1, \quad (113.19)$$

где  $\Phi_1$  – полный угол поворота тела при подъёме груза.

Учитывая, что  $x_3 - x_0 = r\Phi$  и  $x_3 - x_4 = r\Phi_1$ , для оценки момента силы трения получаем соотношение

$$N_{\text{тр}} = mgr \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - x_0 - x_4}. \quad (113.20)$$

### 3. Экспериментальная установка

Основной частью установки является сплошное колесо 1 (рис. 113.3), которое может вращаться вокруг горизонтальной оси. К цилиндру, расположенному на оси колеса, с помощью нити прикреплен груз 2. Помещая груз для его крепления в держатель 3, получаем физический маятник, который может совершать колебания вблизи положения равновесия. Начальный угол отклонения контролируют по угломерной шкале 4.

Если груз извлечь из держателя (при этом его держатель снимается с колеса) и подвесить на нити, он начинает опускаться под действием силы тяжести, приводя колесо во вращение. Установка снабжена системами регистрации числа и времени колебаний маятника, а также и времени опускания груза.

Для отсчёта числа колебаний (Упражнение 1) на колесе с обратной стороны симметрично расположены два лёгких одинаковых по массе тела. На одном из тел закреплён стержень, являющийся составной частью системы измерения периода колебаний.

Время колебаний колеса определяется с помощью электронного таймера 5. Время поступательного перемещения груза при вращательном движении колеса (Упражнение 2) определяется с помощью того же таймера 5, включение и выключение которого в этом случае осуществляется оптическими датчиками 6. Эти датчики крепятся на кронштейнах и могут фиксироваться на различных высотах. Положение датчиков (их координаты  $x_1$  и  $x_2$ ) определяется по миллиметровой шкале на вертикальной опорной стойке.

**Внимание:** После подключения таймера к сети на его экране в трёх последних разрядах высвечиваются калибровочные цифры «888». После проведения измерения времени колебаний или опускания груза в этих разрядах появляются правильные значения десятых, сотых и тысячных долей секунды.

Запуск таймера в режиме измерения времени  $n$  колебаний осуществляется нажатием кнопки «Пуск», остановка – кнопкой «Стоп». Следует иметь в виду, что нажать на кнопку «Стоп» следует после появления отсчёта для числа колебаний

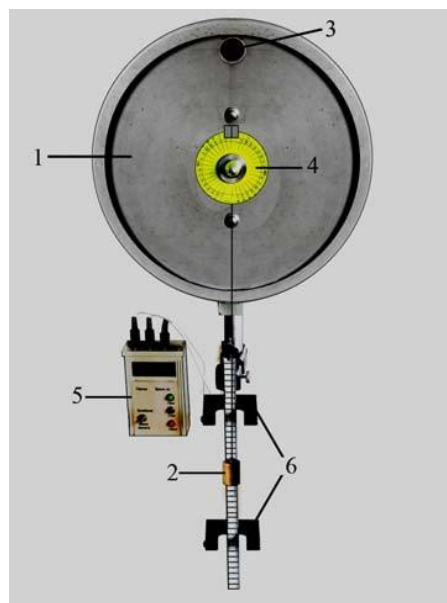


Рис. 113.3. Экспериментальная установка для определения момента инерции колеса

(слева на шкале прибора) на единицу меньшего, чем желаемое для проведения измерений. Например, если вы хотите измерить время 5-ти полных колебаний, то нажать на кнопку следует после появления цифры «4» на экране. После каждого измерения и перед проведением следующего нажимают кнопку «Сброс».

При измерении времени опускания груза нажимают на кнопку «Пуск». Отсчёт секунд начинается после прохождения грузом первого датчика. А после прохождения второго на индикаторе таймера высвечивается точное время прохождения груза между двумя датчиками. При выполнении первой части этого упражнения (2) – при измерениях времени  $\Delta t$  колесо желательно останавливать рукой сразу после прохождения грузом нижней точки траектории.

Переключение таймера в тот или иной режим работы осуществляется тумблером «Колеб.–Вращ.».

## 4. Порядок проведения работы

### Параметры установки:

Масса груза подвеса ( $m_{гр}$ )	– ( $\dots \pm 0,1$ ) г
Масса держателя груза на колесе ( $m$ )	– ( $\dots \pm 0,1$ ) г
Масса двух малых тел ( $m_C$ )	– ( $\dots \pm 0,1$ ) г
Толщины обода	– ( $\dots \pm 0,1$ ) мм
Толщины диска:	– ( $\dots \pm 0,1$ ) мм
Плотность дюралюминия:	$\rho = (2,79 \pm 0,01) \text{ г/см}^3$ .

### Упражнение 1. Определение момента инерции колеса методом колебаний

#### Измерения

1. Электронный таймер переключают в режим «Колеб.».

На краю колеса закрепляют держатель для крепления груза, в который устанавливают груз. Колесо выводят из положения равновесия на угол, не превышающий  $10^\circ$ . С помощью автоматической системы регистрации с таймером определяют время  $t_n$   $n = 5$  полных колебаний. Такое измерение проводят 5 раз. Результаты измерений времени заносятся в табл. 113.1.

#### Экспериментальные данные

Таблица 113.1

$N$	$t_n, \text{ с}$	$\Delta t_n, \text{ с}$
1		
2		
3		
4		
5		

2. Измеряют линейкой расстояние  $L$  от оси вращения до центра масс груза

(это есть расстояние от оси вращения до центра винта, закрепляющего устройство крепления груза на колесе). Записывают значение  $L$  в стандартной форме.

### Обработка результатов

1. По экспериментальным данным вычислить среднее значение времени 5-ти колебаний. Оценить погрешность измерения для  $t_n$  и (учтя также приборную погрешность) записать результат эксперимента в стандартной форме.

2. Записать экспериментальный результат для величин, необходимых для расчёта момента инерции колеса  $I_z$  ( $m$ ,  $T$  и  $L$ ) в стандартной форме:

$$m = (\langle m \rangle \pm \Delta m) \text{ ед.изм.} \quad (\text{с учётом того, что } m = m_{\text{д}} + m_{\text{гр}}),$$

$$T = (\langle T \rangle \pm \Delta T) \text{ ед.изм.},$$

$$L = (\langle L \rangle \pm \Delta L^{\text{пр.}}) \text{ ед.изм.},$$

3. По полученным данным, пользуясь равенством (113.9) :

$$J_z = mL \left( \frac{gT^2}{4\pi^2} - L \right),$$

рассчитать момент инерции колеса  $\langle I_z \rangle$ .

4. Оценить погрешность измерений (учёт «разброса» результатов отдельных измерений  $t_n$ ) и погрешность метода (учёт приборных погрешностей) для  $I_z$ , используя рекомендованные способы расчёта погрешностей косвенных измерений.

5. Объединив погрешности в общую погрешность эксперимента (по упрощенной схеме), записать окончательно результат экспериментального определения момента инерции колеса  $I_z$ , полученного методом колебаний в стандартной форме:

$$I_z^{(\text{кол})} = (\langle I_z \rangle \pm \Delta I_z) \text{ ед.изм.}$$

## Упражнение 2. Определение момента инерции колеса методом вращения (без учёта и с учётом трения)

### Измерения

1. Снять с колеса устройство для крепления груза.

2. Записать в стандартной форме значения координат  $x_0$ ,  $x_2$ , которые не будут изменяться в процессе измерений.

3. Несколько раз измерить штангенциркулем и записать радиус  $r$  цилиндра (см. рис. 113.2), на который наматывается нить. Результат измерений записать в стандартной форме.

4. Измерить время  $\tau_i$  прохождения груза между отметками  $x_1$  и  $x_2$ . Измерения провести не менее 5–7 раз для фиксированных значений  $x_0$ ,  $x_2$  и разных  $x_1$

(рекомендуется изменять координату на 50 мм), каждый раз заноса данные в табл. 113.2.

5. \* По согласованию с преподавателем для последующего учёта сил трения: провести измерения координаты  $x_3$  точки, до которой опускается груз при полностью размотанной нити и координаты  $x_4$  точки, до которой поднимается груз при дальнейшем наматывании нити на цилиндр, пока колесо продолжает свободно вращаться. Данные измерений занести в таблицу 113.2, b.

**Экспериментальные данные**      **Таблица 113.2, a**

$N$	$x_{1i}, \text{мм}$	$\tau_i, \text{с}$	$\Delta\tau_i, \text{с}$	$a_i, \text{м/с}^2$	$\Delta a_i, \text{м/с}^2$
1					
2					
3					
4					
5					
1					
2					
3					
4					
5					
1					
2					
3					
4					
5					

**Таблица 113.2, b**

$N$	$x_{1i}, \text{см}$	$x_{4i}, \text{см}$	$N_{\text{тр}}, \text{Н}\cdot\text{м}$	$\Delta N_{\text{тр}}, \text{Н}\cdot\text{м}$
1				
2				
3				

...

### Обработка результатов

1. По формулам (113.17) и (113.20) пользуясь усреднёнными значениями измеренных величин определить ускорения  $a_i$  для каждого из трёх *разных* значений координаты  $x_1$ . Результаты расчётов занести также в табл. 113.2.

2. Используя равенство (113.13, без учёта сил трения):

$$I_z = mr^2 \left( \frac{g}{a} - 1 \right),$$

рассчитать значение момента инерции колеса и оценить его погрешность.

3. Записать результат экспериментального определения  $I_z$  методом вращения без учёта сил трения в стандартной форме:



$$I_z^{(вращ)} = \left( \langle I_z \rangle \pm \Delta I_z \right) \text{ ед.изм.}$$

4\*. Поскольку  $N_{\text{тр}}$  определённы для различных значений  $x_1$ , можно считать независимыми измерениями для одной и той же величины, найти среднее значение момента сил трения и оценить погрешность эксперимента для этой величины. Результат записать отдельно в стандартном виде.

5\*. Используя равенство (113.13, с учётом сил трения):

$$I_z^{(\text{тр})} = mr^2 \left( \frac{g}{a} - 1 \right) - \frac{N_{\text{тр}} \cdot r}{a}$$

рассчитать значение момента инерции колеса методом вращения с учётом сил трения и оценить его погрешность. Записать результат экспериментального определения  $I_z^{(\text{тр})}$  методом вращения с учётом сил трения в стандартной форме.

### Упражнение 3\*). Прямой расчёт момента инерции колеса

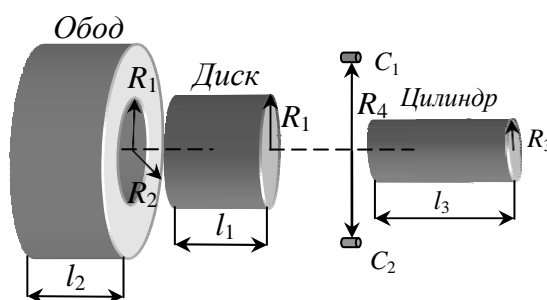


Рис.113.4. Схематическое представление колеса в виде совокупности тел простой формы

#### Измерения

Используемое в установке колесо можно представить как совокупность тел простой формы (рис. 113.4): диска радиуса  $R_1$  и толщины  $l_1$ ; обода толщины  $l_2$  с внешним и внутренним радиусами  $R_2$ ,  $R_1$ ; двух малых тел  $C_1$ ,  $C_2$ , расположенных на расстоянии  $R_4$  от оси цилиндра, имеющего радиус  $R_3$  и толщину  $l_3$ . Для всех этих тел момент инерции можно рассчитать.

С помощью штангенциркуля и линейки определяют геометрические размеры каждой выделенной части колеса по согласованию с преподавателем 3–5 раз. Результаты измерений заносят в табл. 113.3.

#### Результаты измерений

Таблица 113.3

$N$	1	2	3	4	5
$R_{1i}, \text{мм}$					
$\Delta R_1, \text{мм}$					
$R_1, \text{мм}$					

\*) Выполняется по указанию преподавателя

$R_{2i}, мм$					
$\Delta R_{2i}, мм$					
$R_2, мм$					
$R_{3i}, мм$					
$\Delta R_3, мм$					
$R_3, мм$					
$R_{4i}, мм$					
$\Delta R_4, мм$					
$R_4, мм$					
$l_{1i}, мм$					
$\Delta l_1, мм$					
$l_1, мм$					
$l_{2i}, мм$					
$\Delta l_2, мм$					
$l_2, мм$					
$l_{3i}, мм$					
$\Delta l_3, мм$					
$l_3, мм$					

### Обработка результатов

1. Определяют экспериментальные значения  $R_1, R_2, R_3, R_4, l_1, l_2, l_3$ . Результаты заносят в табл. 113.3.

2. Используя результаты для моментов инерции тел простой формы и теорему Штейнера рассчитывают «теоретическое» значение момента инерции колеса и оценивают погрешность.

3. Полученное значение сравнивают со значениями момента инерции колеса, полученными экспериментально в упражнениях 1 и 2.

## 5. Основные итоги работы

*В процессе выполнения работы момент инерции колеса должен быть определён тремя экспериментальными способами. Следует сопоставить эти результаты с «теоретическим» значением.*

## 6. Контрольные вопросы

1. Что такое «твёрдое тело»?
2. Какие типы механического движения выделяют при рассмотрении движения твёрдого тела?
3. Что такое «поступательное»/«вращательное» движение твёрдого тела?
4. Что такое момент силы относительно неподвижной точки пространства? Относительно оси, проходящей через эту точку?

5. Что такое момент импульса твёрдого тела относительно неподвижной точки пространства? Относительно оси, проходящей через эту точку?
6. Запишите «уравнение моментов» для системы материальных точек (твёрдого тела) относительно неподвижной в ИСО точки пространства. Относительно оси, проходящей через эту точку.
7. Дайте определение момента инерции твёрдого тела относительно оси.
8. Как связаны момент импульса твёрдого тела относительно неподвижной оси вращения и угловая скорость вращения относительно этой оси?
9. Сформулируйте теорему Гюйгенса – Штейнера.
10. В чём состоит метод определения момента инерции твёрдого тела с использованием его колебаний – «метод колебаний», который используется в данной работе?
12. Опишите устройство лабораторной установки.
13. Расскажите о порядке выполнения лабораторной работы и проведении измерений.
14. Рассчитайте момент инерции тела по указанию преподавателя.