

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**имени М. В. Ломоносова**

---

**Физический факультет**

**кафедра общей физики и физики конденсированного состояния**

**Методическая разработка**

**по общему физическому практикуму**

**Лаб. работа № 14**

**КРУТИЛЬНЫЙ БАЛЛИСТИЧЕСКИЙ**

**МАЯТНИК**

**Описание составили**

**доцент Авксентьев Ю. И. и доцент Скипетрова Л. А.**

**Москва - 2011**

При составлении описания использовалась методическая разработка по общему физическому практикуму к задачам № 13 и № 14 «Баллистический метод измерения скорости пули» Ивановой Т.И. и Пустовалова Г.Е.  
Москва, 1975 г.

# ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ.<sup>1</sup>

Баллистический метод определения скорости пули (снаряда) основывается на применении законов сохранения: закона сохранения механической энергии, закона сохранения импульса (количества движения) и закона сохранения момента импульса (момента количества движения). Рассмотрим эти законы.

## Классификация сил.

Если работа силы, совершаемая над материальной точкой, не зависит от формы траектории этой точки, а определяется только начальным и конечным положением точки, то сила называется *потенциальной*, или *консервативной*. Из консервативных сил в механике рассматриваются силы тяготения и упругости.

Если же работа силы над материальной точкой зависит от формы траектории этой точки, то такая сила называется непотенциальной или *неконсервативной*. Примером неконсервативной силы является сила трения.

При рассмотрении движения совокупности тел часто бывает удобно некоторые из этих тел мысленно объединить в систему. Силы, которые действуют на каждое из тел системы со стороны других тел, принадлежащих этой системе, называются *внутренними силами*. Наоборот, те силы, которые действуют на тела системы со стороны тел, не включенных в эту систему, называются *внешними*.

Система тел, на которую не действуют внешние силы, называется *замкнутой*.

## Законы сохранения и изменения механической энергии.

В том случае, когда внутренние силы являются потенциальными, система при любом заданном расположении тел, входящих в нее, обладает определенной потенциальной энергией  $U$ . При изменении расположения тел системы внутренние силы совершают некоторую суммарную работу  $\Delta A$ . Эта работа равна уменьшению потенциальной энергии системы  $-\Delta U$ . Чтобы найти саму величину потенциальной энергии системы, нужно еще условиться, при каком расположении тел системы ее потенциальная энергия равна нулю. Таким образом, потенциальная энергия системы равна взятой с обратным знаком работе всех внутренних потенциальных сил при изменении расположения тел системы от заданного до расположения, при котором величина потенциальной энергии считается равной нулю.

Кинетическая энергия системы  $W$  равна сумме кинетических энергий всех материальных точек системы, т.е.  $W = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}$ , где  $m_i$  – масса и  $v_i$  – скорость материальной точки системы с номером  $i$ .

---

<sup>1</sup> Теоретическое введение написано доц. Ивановой Т.И. и доц. Пустоваловым Г.Е.

Полная механическая энергия системы  $E$  складывается из ее кинетической энергии  $W$  и ее потенциальной энергии  $U$ . Полная механическая энергия замкнутой системы тел, внутренние силы которой потенциальны, не изменяется с течением времени, т.е.

$$E = W + U = const \quad (1)$$

Отсюда следует, что

$$\Delta W + \Delta U = 0$$

или

$$\Delta W = -\Delta U \quad (2)$$

Это значит, что приращение кинетической энергии в этом случае равно уменьшению потенциальной энергии.

Если между телами системы действуют также и неконсервативные силы, то полная механическая энергия системы изменится, причем это изменение равно работе  $A_{нк}$  неконсервативных сил.

В случае незамкнутой системы полное изменение ее механической энергии  $\Delta E$  равно сумме работ: 1)  $A_{внеш}$  внешних сил и 2)  $A_{нк}$  - неконсервативных сил, действующих в этой системе.

Таким образом, в общем случае

$$\Delta E = \Delta W + \Delta U = A_{внеш} + A_{нк} \quad (3)$$

### **Импульс. Закон изменения и сохранения импульса.**

Рассмотрим систему, состоящую из  $N$  материальных точек. Точка с номером  $i$ , имеющая скорость  $v_i$  и массу  $m_i$ , как известно, обладает импульсом (количеством движения)  $\vec{K}_i = m_i \vec{v}_i$ . Импульсом  $\vec{K}$  всей системы мы назовем векторную сумму импульсов всех точек системы, т.е.

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^N \vec{K}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i.$$

При движении каждой точки должен выполняться 2-й закон Ньютона. В частности, для точки с номером  $i$  этот закон имеет вид

$$m_i \vec{a}_i = \sum_j \vec{f}_j, \quad (4)$$

где  $\vec{a}_i$  - ускорение точки,  $\sum_j \vec{f}_j$  - сумма всех сил, действующих на точку.

Учитывая, что  $m_i = const$ ,  $m_i \vec{a}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \frac{d\vec{K}_i}{dt}$ , уравнение (4) можно представить в виде

$$\frac{d\vec{K}_i}{dt} = \sum_j \vec{f}_j. \quad (5)$$

Пусть теперь  $\vec{f}_{i1}, \vec{f}_{i2}, \dots, \vec{f}_{iN}$  - внутренние силы, действующие на нашу точку со стороны точек 1, 2, 3, ..., N соответственно, а  $\vec{F}_i$  - сумма внешних сил, действующих на эту точку. Напишем для каждой точки системы, начиная с точки 1 и кончая точкой N, второй закон Ньютона в виде (5):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{K}_1}{dt} &= \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \dots + \vec{f}_{1N} + \vec{F}_1, \\ \frac{d\vec{K}_2}{dt} &= \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \dots + \vec{f}_{2N} + \vec{F}_2, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d\vec{K}_N}{dt} &= \vec{f}_{N1} + \vec{f}_{N2} + \dots + \vec{f}_{N,N-1} + \vec{F}_N. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Сложим теперь эти уравнения. При этом учтем, что силы взаимодействия между точками системы, согласно 3-му закону Ньютона, попарно равны и противоположны по направлению, т.е.  $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}, \vec{f}_{13} = -\vec{f}_{31}, \dots, \vec{f}_{1N} = -\vec{f}_{N1}$  и т.д. Так как все эти пары войдут в сумму сил, то при сложении правых частей уравнений (6) сумма внутренних сил оказывается равной нулю; в правой части остается только  $\sum_i \vec{F}_i$  - сумма внешних сил. Складывая левые части уравнений (6), учитывая, что, согласно правилам дифференциального исчисления

$$\frac{d\vec{K}_1}{dt} + \frac{d\vec{K}_2}{dt} + \dots + \frac{d\vec{K}_N}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \dots + \vec{K}_N) = \frac{d\vec{K}}{dt},$$

где по определению  $\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \dots + \vec{K}_N$  является импульсом всей системы.

Таким образом, мы приходим к уравнению

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (7)$$

определяющему изменение импульса системы: *производная по времени импульса системы (изменение импульса в единицу времени) равна сумме внешних сил, действующих на точки системы.*

Если в любой момент времени  $\sum_i \vec{F}_i = \mathbf{0}$ , то  $\frac{d\vec{K}}{dt} = \mathbf{0}$ . Следовательно,  $\vec{K} = const$ . Таким образом, из уравнения (7) вытекает закон сохранения импульса: *импульс системы материальных точек остается постоянным, если сумма внешних сил, действующих на систему, все время равна нулю.*

В частности, в замкнутой системе, на которую внешние силы вообще не действуют, импульс сохраняется.

Вследствие векторного характера уравнения (7) проекция импульса  $\vec{K}$  на некоторое направление остается постоянной и в том случае, когда на систему действуют внешние силы, сумма которых, вообще говоря, отлична от нуля, но сумма проекций внешних сил на это направление все время равна нулю.

Например, проекция силы тяжести на горизонтальное направление все время равна нулю. Поэтому в системе, для которой внешними силами являются силы тяжести, остается постоянной проекция импульса системы на горизонтальное направление.

### Момент силы.

Пусть на некоторую материальную точку  $A$  действует сила  $\vec{F}$  (см. рис. 1). Чтобы найти момент этой силы относительно некоторой оси  $QS$ , через точку  $A$  проводится плоскость  $P$ , перпендикулярная оси. От точки  $O$  пересечения оси плоскостью к точке  $A$  проводится радиус-вектор  $\vec{r}$ .

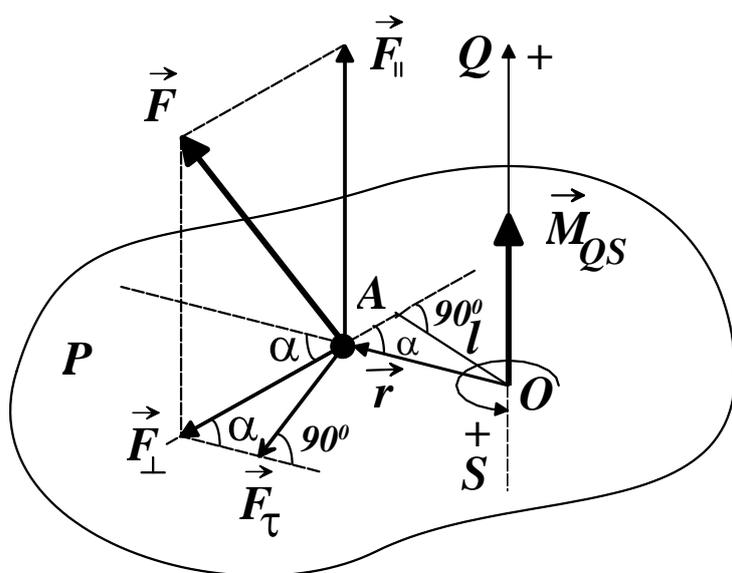


Рис. 1

Сила  $\vec{F}$  раскладывается на две составляющие: составляющую  $\vec{F}_{\parallel}$ , направленную вдоль оси и в дальнейшем не используемую, и составляющую  $\vec{F}_{\perp}$ , лежащую в плоскости  $P$ . Тогда величина момента силы  $\vec{F}$  относительно оси  $QS$  определяется формулой

$$M_{QS} = rF_{\perp} \sin \alpha, \quad (8)$$

где  $r$  - величина радиуса-вектора  $\vec{r}$ ,  $F_{\perp}$  - величина составляющей  $\vec{F}_{\perp}$ , а  $\alpha$  - угол между направлением

радиуса-вектора и направлением  $\vec{F}_{\perp}$ .

Кратчайшее расстояние  $l$  между осью и прямой, по которой направлена составляющая  $\vec{F}_{\perp}$ , называется плечом. Из рисунка видно, что  $l = r \sin \alpha$ . Таким образом, согласно формуле (8), величину момента можно представить в виде

$$M_{QS} = F_{\perp} l. \quad (9)$$

Составляющую  $\vec{F}_\perp$  можно, в свою очередь, разложить на составляющие, лежащие в плоскости  $P$ : одну вдоль радиуса-вектора, а другую - перпендикулярно ему. На рис. 1 показана только составляющая  $\vec{F}_\tau$ , перпендикулярная радиусу-вектору. Из рисунка 1 видно, что величина этой составляющей  $\vec{F}_\tau = \vec{F}_\perp \sin\alpha$ .  
 При помощи формулы (8) теперь найдем, что

$$M_{qs} = rF_\tau. \quad (10)$$

Все три формулы (8), (9) и (10) равноправны. В различных случаях удобно пользоваться какой-либо из них. В частности, при помощи формулы (10) легко доказать следующее. Если к некоторой точке приложено несколько сил, то момент суммы этих сил относительно некоторой оси равен сумме моментов всех этих сил относительно той же оси. Следует отметить, что момент суммы сил, приложенных к *разным* точкам, вообще говоря, не равен сумме моментов этих сил.

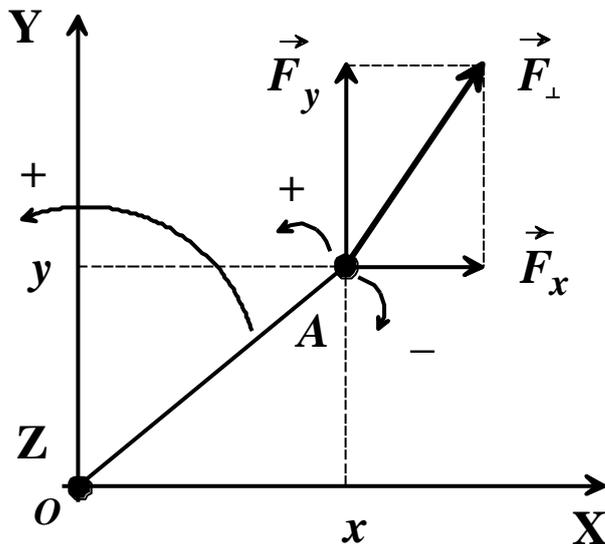


Рис. 2

Формулы (8), (9) и (10) дают величину момента силы. Знак момента силы определяется следующим образом. Выбирается положительное направление вращения вокруг данной оси (при использовании праввинтовой системы это вращение против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси). Если  $\vec{F}_\tau$  вращает (направлена) в сторону положительного направления вращения, то момент силы положителен, если же  $\vec{F}_\tau$  направлена в сторону

отрицательного направления вращения, то момент отрицателен. Момент силы на рисунке 1, согласно этому правилу, положителен.

Удобно считать момент силы относительно оси вектором, направленным вдоль этой оси (в положительном направлении, если момент положителен, и в отрицательном в обратном случае). Согласно правилам действия с векторами, момент силы может быть представлен в виде векторного произведения

$$\vec{M}_{qs} = [\vec{r}, \vec{F}_\perp]. \quad (11)$$

В самом деле, величина этого векторного произведения совпадает с величиной момента  $M_{QS}$  согласно формуле (8), а направление перпендикулярно и  $\vec{r}$  и  $\vec{F}_\perp$ , т.е. вектор  $\vec{M}_{QS}$  направлен вдоль оси в сторону, определяемую правилом векторного произведения. Заметим еще, что формулы (8), (9) и (10) вместе с правилом знаков, приведенным выше, дают с этой точки зрения проекцию вектора  $\vec{M}_{QS}$  на направление оси  $QS$ . Рассмотрим теперь момент силы  $\vec{F}$ , если ось, относительно которой вычисляется момент, представляет собой ось  $Z$  прямоугольной декартовой системы координат. В этом случае плоскость, в которой находится точка  $A$  приложения силы, перпендикулярна оси  $Z$  и параллельна плоскости  $XOY$  (см. рис. 2, на котором ось  $Z$  проходит через точку  $O$  перпендикулярно плоскости рисунка по направлению к читателю). Составляющая  $\vec{F}_\perp$  силы  $\vec{F}$  лежит в плоскости, параллельной плоскости  $XOY$ , т.е. в плоскости рисунка. Эту составляющую можно, в свою очередь, разложить на составляющие  $\vec{F}_x$  и  $\vec{F}_y$ , вдоль координатных осей  $X$  и  $Y$ .

Момент  $M_z$  силы  $\vec{F}$  будет равен сумме моментов составляющих  $\vec{F}_x$  и  $\vec{F}_y$  относительно оси  $Z$ . Как легко видеть из рис. 2, плечом составляющей  $\vec{F}_y$  будет величина  $x$ , а плечом составляющей  $\vec{F}_x$  - величина  $y$ , причем  $x$  и  $y$  равны соответствующим координатам точки  $A$ .

Следовательно,

$$M_z = F_y x - F_x y. \quad (12)$$

Здесь у второго члена стоит знак минус, потому что момент составляющей  $\vec{F}_x$ , как это можно видеть на рис. 2, отрицателен. Заметим, что в выражении (12) знак момента силы для правой декартовой системы координат получается автоматически в зависимости от величин  $x$ ,  $y$ ,  $F_x$  и  $F_y$  и их знаков.

### Момент импульса.

Момент импульса  $\vec{L}$  (момент количества движения) материальной точки относительно некоторой оси определяется аналогично моменту силы относительно оси (см. рис. 3). Нужно только во всех рассуждениях и во всех формулах для момента силы (8) – (12) заменить составляющие вектора силы  $\vec{F}$  составляющими вектора импульса  $\vec{K} = m\vec{v}$  материальной точки. Прделаав это, мы получим

$$L_{QS} = rK_\perp \sin\alpha = rmv_\perp \sin\alpha, \quad (13)$$

$$L_{QS} = K_\perp l = mv_\perp l, \quad (14)$$

$$L_{QS} = rK_{\tau} = rmv_{\tau}, \quad (15)$$

$$\vec{L}_{QS} = [\vec{r}, \vec{K}_{\perp}], \quad (16)$$

$$L_z = K_y x - K_x y = mv_y x - mv_x y \quad (17)$$

Рассмотрим теперь в качестве примера два частных случая вычисления момента импульса.

1). Найдем момент импульса материальной точки с массой  $m$ , движущейся

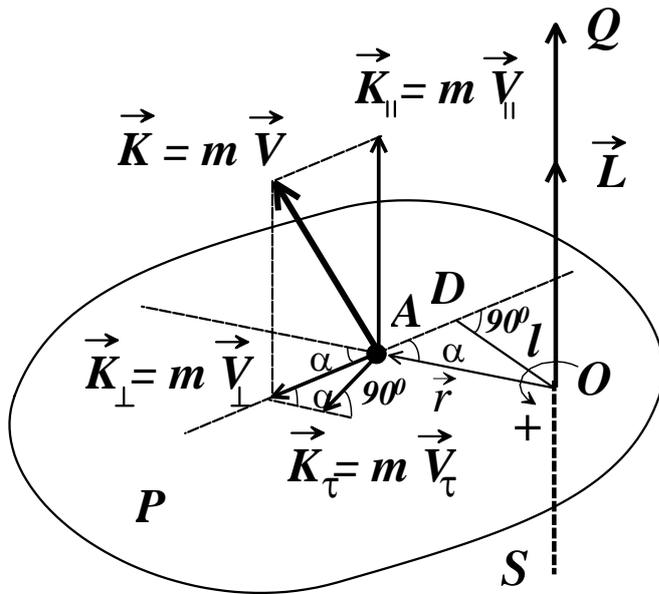


Рис. 3

прямолинейно с постоянной скоростью  $\vec{v}$ , относительно оси, перпендикулярной направлению движения точки. Проведем через траекторию точки плоскость, перпендикулярную оси (см. рис. 4). Так как скорость точки  $\vec{v}$  лежит в этой плоскости, то  $\vec{v}_{\perp} = \vec{v}$ . Согласно формуле (14) момент импульса точки равен

$$L = mvl, \quad (18)$$

где  $l$  - плечо – кратчайшее расстояние от оси до линии, по которой направлена составляющая импульса точки  $\vec{K}_{\perp} = \vec{K}$ . Из рис 4

видно, что несмотря на изменение радиуса-вектора  $\vec{r}$  ( $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2$ ) при движении точки плечо  $l$  остается постоянным. Следовательно, в этом случае момент импульса  $\vec{L}$  в процессе движения не изменяется.

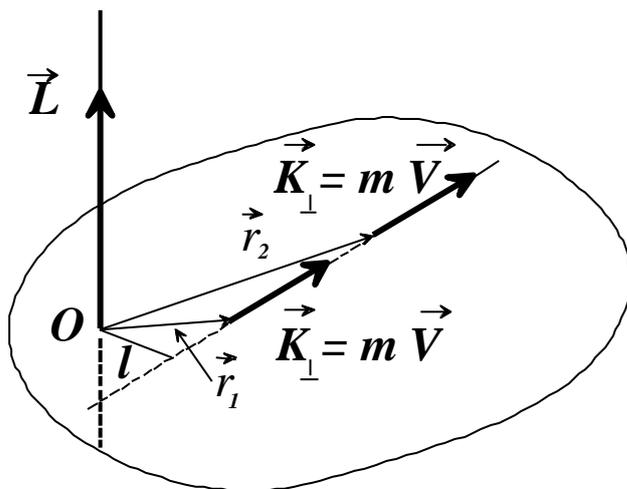


Рис. 4

2) Найдем момент импульса материальной точки, движущейся по окружности радиуса  $r$  с постоянной скоростью  $v$ , относительно оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно плоскости, в которой лежит эта окружность (рис. 5). Поскольку скорость все время лежит в плоскости, перпендикулярной оси, и перпендикулярна радиусу-вектору  $\vec{r}$ , то в этом случае  $\vec{v}_{\tau} = \vec{v}$ . Воспользовавшись формулой (15)

, найдем

$$L = mvr . \quad (19)$$

Как известно, скорость  $v$  точки, движущейся по окружности радиуса  $r$ , связана с ее угловой скоростью  $\omega$  соотношением  $v = \omega \cdot r$ . Используя это соотношение, получим

$$L = mr^2\omega = J\omega , \quad (20)$$

где величина  $J = mr^2$  носит название момента инерции материальной точки. Заметим что и в этом случае

$L = const$ , поскольку все величины, входящие в формулы (19) и (20) постоянны.

Если угловую скорость, как это принято, считать вектором  $\vec{\omega}$ , направленным вдоль оси, положительное направление которой определяется по правилу правого буравчика (ручку буравчика нужно вращать по направлению

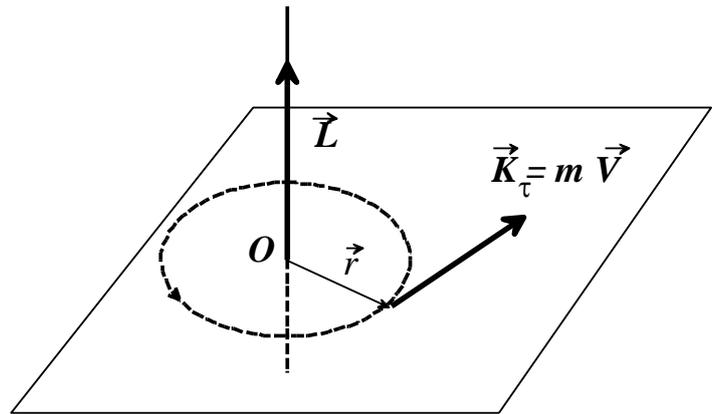


Рис. 5

движения точки), то формуле (20) можно придать векторный вид

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} = J\vec{\omega} . \quad (21)$$

Вектор  $\vec{L}$  направлен в ту же сторону, что и  $\vec{\omega}$ . То же направление получается и по формуле (16).

### Уравнение моментов для материальной точки.

Пусть материальная точка массы  $m$  движется под действием силы  $\vec{F}$ . Если выбрана прямоугольная декартова система координат, в которой описывается движение точки, то момент силы и момент импульса точки относительно оси  $Z$  выражаются формулами (12) и (17). Сделаем два замечания: 1) под силой  $\vec{F}$  следует подразумевать сумму всех сил, действующих на точку; 2) если желательно моменты вычислять относительно какой-либо определенной оси, то всегда можно выбрать систему координат так, чтобы ось  $Z$  совпадала с данной осью.

Найдем уравнение, связывающее производную  $\frac{dL_z}{dt}$  момента импульса точки по времени с моментом силы  $M_z$ , аналогичное 2-му закону Ньютона,

который связывает производную импульса  $\frac{d\vec{K}}{dt}$  и силой  $\vec{F}$ , действующей на нее.

Продифференцируем выражение (17) по времени, учитывая, что от времени могут зависеть координаты точки и проекции ее скорости. В результате получится

$$\frac{dL_z}{dt} = m \frac{dv_y}{dt} x + mv_y \frac{dx}{dt} - m \frac{dv_x}{dt} y - mv_x \frac{dy}{dt}.$$

Как известно,

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dv_x}{dt} = a_x \quad \text{и} \quad \frac{dv_y}{dt} = a_y,$$

где  $a_x$  и  $a_y$  - проекции ускорения на оси координатные оси  $X$  и  $Y$ .

Следовательно,

$$\frac{dL_z}{dt} = ma_y x - ma_x y.$$

С другой стороны, согласно 2-му закону Ньютона,  $ma_x = F_x$  и  $ma_y = F_y$ .

Поэтому

$$\frac{dL_z}{dt} = F_y x - F_x y.$$

Сравнив это выражение с формулой (12), находим искомое уравнение

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (22)$$

Поскольку, как уже говорилось, ось может быть выбрана произвольно, а на точку может действовать несколько сил, то уравнение справедливо и в более общем виде в векторной форме

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i. \quad (23)$$

Таким образом, *производная по времени момента импульса материальной точки относительно некоторой оси равна сумме моментов всех сил (относительно той же оси), действующих на эту точку.* Уравнение (23) мы будем называть уравнением моментов для материальной точки.

Возвращаясь к примерам, рассмотренным на стр. 10-12, можно отметить, что в первом случае на точку не действуют никакие силы, так как она движется прямолинейно и равномерно. При этом импульс точки остается постоянным. Более того, если силы равны нулю, то равен нулю момент сил. Согласно уравнению (23) должна быть равна нулю и производная момента импульса. Следовательно, момент импульса также должен оставаться постоянным в согласии с выводом, сделанным ранее.

Во втором случае, когда точка движется по окружности, закон сохранения импульса не выполняется, так как на точку обязательно должна действовать сила, сообщающая ей центростремительное ускорение. Хотя скорость точки и постоянна по величине, ее направление все время меняется. Следовательно, изменяется по направлению и импульс точки. С другой стороны, сила, действующая на точку, направлена по радиусу. Плечо этой силы равно нулю. Поэтому равен нулю и момент силы. Таким образом, в данном случае в соответствии с уравнением (23) момент импульса точки остается постоянным, как это было показано выше.

### Уравнение моментов для системы материальных точек.

Моментом импульса  $\vec{L}$  системы материальных точек относительно некоторой оси мы будем называть сумму моментов импульсов относительно той же оси всех точек, составляющих эту систему, т.е.  $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$ , где  $\vec{L}_i$  - момент импульса точки с номером  $i$ .

Покажем предварительно, что моменты внутренних сил попарно равны

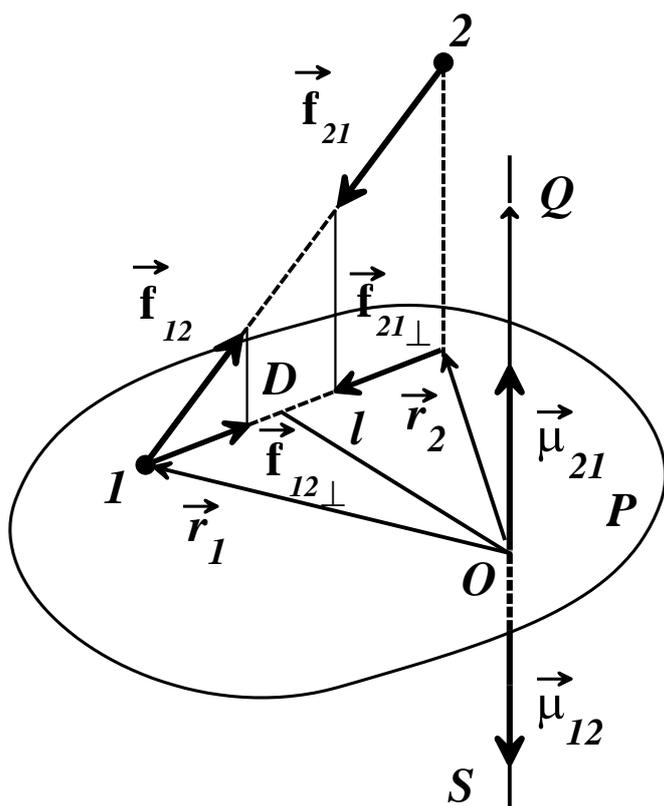


Рис. 6

и противоположны. Пусть 1 и 2 точки системы, взаимодействующие между собой (см. рис. 6). Точка 1 действует на точку 2 силой  $\vec{f}_{21}$ , а точка 2 на точку 1 – силой  $\vec{f}_{12}$ . Эти силы, согласно 3-му закону Ньютона, равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Найдем моменты  $\mu_{12}$  и  $\mu_{21}$  этих сил относительно оси  $QS$ . Для этого проведем плоскость  $P$ , перпендикулярную оси  $QS$  (для простоты рисунка плоскость  $P$  мы провели через точку 1).

Составляющие  $\vec{f}_{12\perp}$  и  $\vec{f}_{21\perp}$  этих сил, лежащие в

плоскости  $P$ , как легко видеть, также равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Поэтому плечом  $l$  и для той и

для другой составляющей будет один и тот же перпендикуляр  $OD$ , проведенный в плоскости  $P$  от оси к линии, по которой направлены  $\vec{f}_{12\perp}$  и  $\vec{f}_{21\perp}$  (несмотря на то, что радиус-векторы  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  точек 1 и 2 не равны между собой). Таким образом, момент  $\mu_{12} = f_{12\perp}l$  силы  $\vec{f}_{12}$  равен по величине моменту  $\mu_{21} = f_{21\perp}l$  силы  $\vec{f}_{21}$ . Так как  $\vec{f}_{12\perp}$  и  $\vec{f}_{21\perp}$  направлены противоположно, то моменты  $\vec{\mu}_{12}$  и  $\vec{\mu}_{21}$  вращают в разные стороны. Следовательно,  $\vec{\mu}_{12} = -\vec{\mu}_{21}$ .

Рассмотрим систему, состоящую из  $N$  материальных точек. На точку с номером  $i$  со стороны точек 1, 2, 3, ...,  $N$  действуют внутренние силы, которые создают относительно некоторой заданной оси моменты сил  $\vec{\mu}_{i1}, \vec{\mu}_{i2}, \dots, \vec{\mu}_{iN}$ . Кроме того, на эту же точку могут действовать и внешние силы. Пусть  $\vec{M}_i$  - момент суммы этих сил относительно той же оси. Напишем для каждой точки системы уравнение моментов относительно данной оси:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{L}_1}{dt} &= \vec{\mu}_{12} + \vec{\mu}_{13} + \dots + \vec{\mu}_{1N} + \vec{M}_1, \\ \frac{d\vec{L}_2}{dt} &= \vec{\mu}_{21} + \vec{\mu}_{23} + \dots + \vec{\mu}_{2N} + \vec{M}_2, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d\vec{L}_N}{dt} &= \vec{\mu}_{N1} + \vec{\mu}_{N2} + \dots + \vec{\mu}_{N,N-1} + \vec{M}_N. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Сложим теперь эти уравнения. При сложении левых частей получим

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} + \dots + \frac{d\vec{L}_N}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_N) = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Так как моменты внутренних сил попарно равны и противоположны по знаку

$$\vec{\mu}_{12} = -\vec{\mu}_{21}, \vec{\mu}_{13} = -\vec{\mu}_{31}, \dots, \vec{\mu}_{1N} = -\vec{\mu}_{N1}$$

и т.д., то в результате сложения в правой части останется лишь сумма моментов внешних сил, т.е.  $\sum_i \vec{M}_i$ . Таким образом, мы получаем уравнение моментов для системы материальных точек:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i, \quad (25)$$

т.е. производная по времени момента импульса системы материальных точек относительно некоторой оси равна сумме моментов внешних сил, действующих на систему (относительно той же оси).

Из этого уравнения вытекает закон сохранения момента импульса системы материальных точек: *если все время равна нулю сумма моментов внешних сил, действующих на систему, относительно некоторой оси, то момент импульса системы относительно той же оси остается постоянным.* В самом деле, если  $\sum_i \vec{M}_i = \mathbf{0}$ , то  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \mathbf{0}$ , и, следовательно,  $\vec{L} = const$ .

Момент импульса замкнутой системы относительно любой оси остается постоянным, так как в этом случае отсутствуют внешние силы. Однако могут быть случаи, когда момент импульса сохраняется относительно какой-либо оси и для незамкнутой системы. В частности, это бывает, если все внешние силы направлены вдоль этой оси, или линии, по которым направлены внешние силы, проходят через ось.

### **Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.**

Твердое тело является частным случаем системы материальных точек. Поэтому для него верны все полученные выше выводы. Найдем уравнение моментов в случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

При вращении твердого тела с угловой скоростью  $\omega$  каждый элемент тела с массой  $\Delta m_i$  движется в плоскости, перпендикулярной оси, по окружности некоторого радиуса  $r_i$  с той же угловой скоростью. Момент импульса  $\Delta \vec{L}_i$  каждого элемента тела можно подсчитать по формуле (21):

$$\Delta \vec{L} = \Delta m_i r_i^2 \vec{\omega} = \Delta J_i \vec{\omega}, \quad (26)$$

где  $\Delta J = \Delta m_i r_i^2$  - момент инерции элемента относительно оси вращения. Момент импульса твердого тела найдем, сложив моменты импульсов всех его элементов:

$$\vec{L} = \sum_i \Delta \vec{L}_i = \vec{\omega} \sum_i \Delta J_i = J \vec{\omega}, \quad (27)$$

где  $J = \sum_i \Delta J_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2$  - момент инерции тела относительно оси вращения.

Так как момент инерции  $J$  - величина постоянная, то из уравнения моментов (25) получим для твердого тела

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(J\vec{\omega}) = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i. \quad (28)$$

Здесь  $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\beta}$  - угловое ускорение, одинаковое для всех точек тела. Таким образом, уравнение моментов в случае вращения твердого тела имеет вид

$$J\vec{\beta} = \sum_i \vec{M}_i, \quad (29)$$

где  $\sum_i \vec{M}_i$  - момент внешних сил, действующих на тело, относительно оси вращения.

Если  $\sum_i \vec{M}_i = \mathbf{0}$ , то из уравнения (28) следует, что  $\frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = \mathbf{0}$  и  $\vec{L} = J\vec{\omega} = \text{const}$ . В этом случае твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью.

Найдем еще выражение для кинетической энергии твердого тела при вращении его вокруг неподвижной оси. Каждый элемент тела в этом случае имеет скорость  $v_i = \omega \cdot r_i$ . Его кинетическая энергия

$$\Delta W = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\Delta J_i \omega^2}{2}.$$

Складывая энергию всех элементов тела, получим

$$W = \sum_i \Delta W_i = \sum_i \frac{\Delta J_i \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \Delta J_i.$$

Так как  $\sum_i \Delta J_i = J$  - момент инерции тела относительно оси вращения, то окончательно получим

$$W = \frac{J\omega^2}{2}. \quad (30)$$

## Лаб. работа №14 ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ СНАРЯДА ПРИ ПОМОЩИ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

**Цель работы.** На примере неупругого соударения изучаются законы сохранения энергии, импульса и момента импульса при определении скорости «снаряда» (металлического кольца) с помощью крутильного баллистического маятника.

### Описание экспериментальной установки.

Общий вид установки представлен на рисунке 1. Установка состоит из основания, вертикальной стойки, верхнего и нижнего кронштейна, среднего

кронштейна с платформой, набора «снарядов» различной массы, набора пружин и спускового устройства.

Верхний и нижний кронштейны предназначены для крепления узлов подвески (четырех роликов) и натяжения с помощью пружины торсиона (стальной проволоки), с которым связана металлическая рамка-маятник. В рамку-маятник встроена мишень с противовесом. Со стороны «пушки» на мишень нанесен слой пластилина, в котором застревает «снаряд» после выстрела. На рамке сверху размещаются два съемных груза 1 и 2, которые превращают рамку в крутильный баллистический маятник.

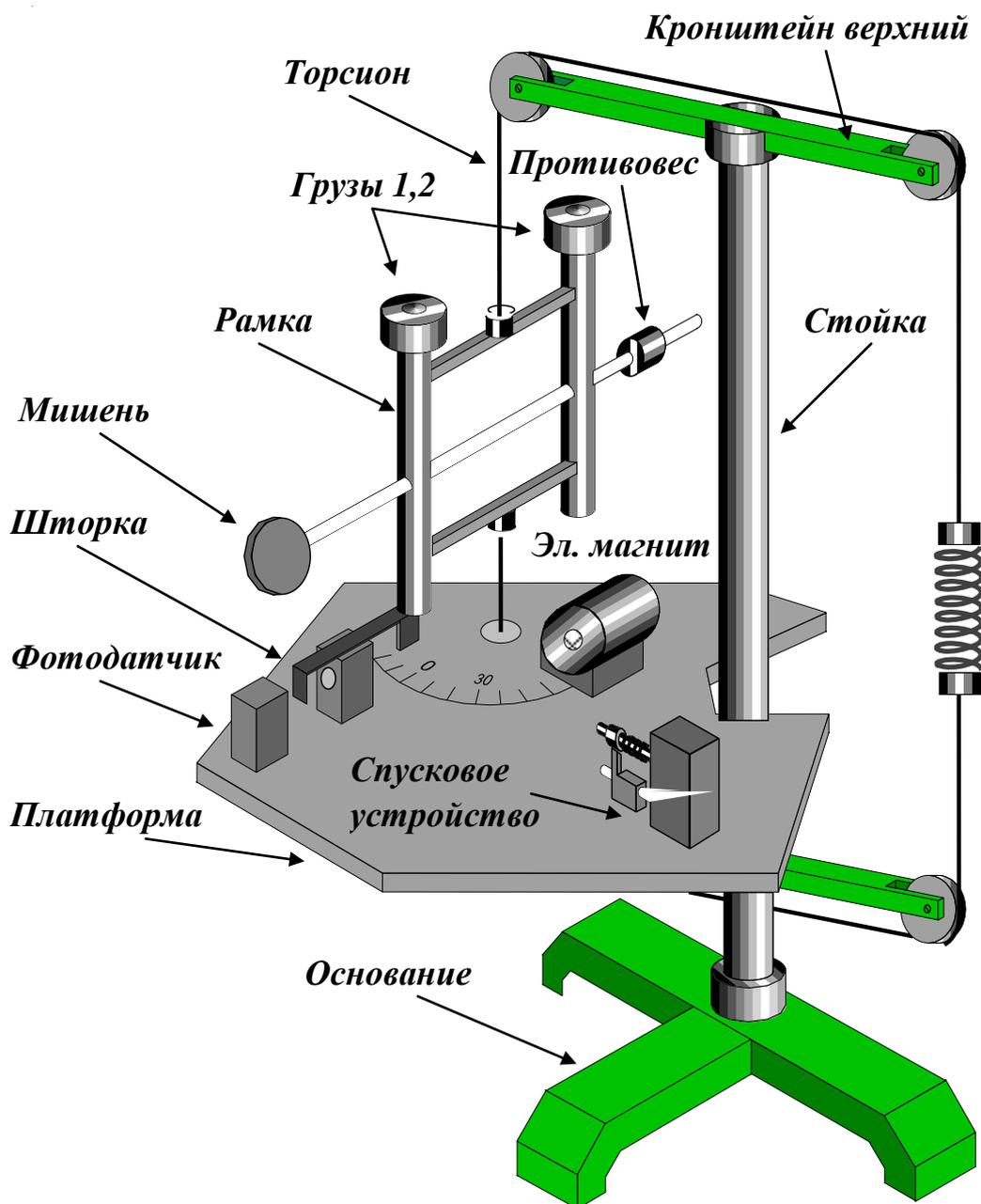
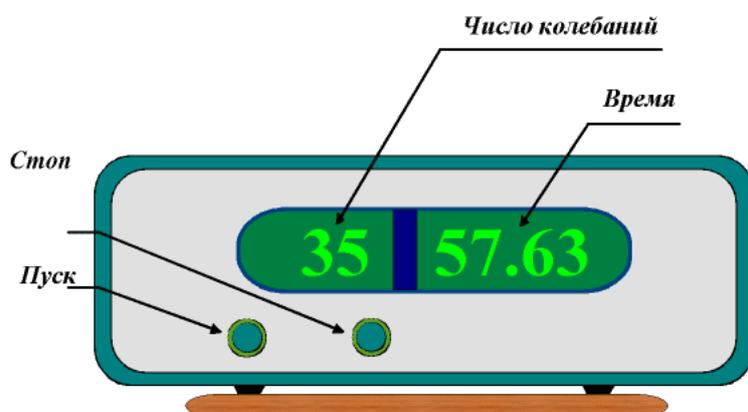


Рис.7 Общий вид установки

На платформе нанесена шкала отсчета угла закручивания торсиона. На ней же расположена пружинная «пушка», предназначенная для производства «выстрела».

Для повышения точности измерений на платформе установлен



фотодатчик, управляемый флажком, жестко связанным с подвижной рамкой. С помощью кабеля фотодатчик связан с электронным секундомером, рис. 8, который измеряет время колебаний рамки после «выстрела». Помимо времени электронный секундомер измеряет так же число колебаний рамки.

Рис. 8

### Вывод рабочей формулы.

Рассмотрим систему, состоящую из снаряда и маятника. Вначале маятник неподвижен, а снаряд массой  $m$  летит горизонтально в направлении, перпендикулярном стержню со скоростью  $V$ . Величина момента импульса снаряда относительно оси маятника равна  $L = mVl$ , где  $l$  - кратчайшее расстояние от оси маятника до линии, по которой происходит движение снаряда. Затем снаряд застревает в пластине, т.е. происходит абсолютно неупругий удар. Рамка вместе с застрявшим в ней снарядом начинает поворачиваться вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega_0$ . Тогда сразу после соударения момент импульса системы рамка-снаряд относительно оси рамки будет  $L_2 = J\omega_0$ , где  $J$  – момент инерции рамки вместе с застрявшим в ней снарядом.

Выясним, можно ли в данной задаче применить закон сохранения момента импульса. Внешними силами для системы рамка-снаряд являются сила тяжести, действующая на снаряд и рамку, упругие силы, обусловленные растяжением проволоки, и силы, связанные с деформацией кручения проволоки. Сила натяжения уравнивает силу тяжести и действует вертикально вверх при любом положении рамки; обе силы направлены вдоль оси рамки, следовательно, моменты этих сил относительно оси рамки равны нулю. Силы кручения появляются при повороте рамки на некоторый угол  $\alpha$  от положения равновесия, вызывая момент сил  $M$ , стремящийся вернуть рамку в положение равновесия. С учетом того, что время соударения пули с рамкой  $\tau$  много меньше периода колебаний  $T$  самой рамки (условия

применимости баллистического метода), запишем для системы рамка-снаряд закон сохранения момента импульса

$$L_1 = L_2, \quad \text{т.е.} \quad mVl = J\omega_0. \quad (31)$$

Рассмотрим теперь дальнейшее движение системы и для его описания применим закон изменения механической энергии. После соударения система имеет кинетическую энергию  $E = \frac{J\omega_0^2}{2}$ . По мере того, как рамка поворачивается и закручивается проволока, на которой она подвешена, возрастает момент сил кручения. Согласно закону Гука этот момент пропорционален деформации кручения проволоки. Мерой деформации кручения является угол  $\alpha$  поворота рамки от положения равновесия. Следовательно,

$$M = D\alpha,$$

где  $D$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от упругих свойств проволоки и называемый модулем кручения. Полная работа  $A$ , которую совершают силы кручения при изменении угла поворота рамки от нуля до максимального значения  $\alpha_0$ , определяется выражением

$$A = \int_0^{\alpha_0} D\alpha \cdot d\alpha = \frac{1}{2} D\alpha_0^2.$$

Заметим здесь, что момент импульса системы при этом уже не будет сохраняться, так как на нее действует момент внешних сил  $M$ .

Когда угол поворота рамки достигнет максимального значения  $\alpha_0$ , угловая скорость вращения рамки станет равной нулю. Следовательно, в этот момент равна нулю и кинетическая энергия системы. Таким образом, кинетическая энергия системы при повороте рамки от начального положения до угла  $\alpha_0$

меняется от  $E = \frac{J\omega_0^2}{2}$  до нуля. Потенциальная энергия системы при этом остается постоянной, поскольку расположение частей системы относительно друг друга не изменяется (напомним, что Земля и проволока, на которой подвешена рамка, в систему не включены). В результате полное изменение механической энергии нашей системы  $\Delta E = \frac{J\omega_0^2}{2}$ .

Согласно закону сохранения энергии изменение полной механической энергии системы равно работе внешних сил и работе неконсервативных сил, действующих между телами системы. Неконсервативные силы здесь работы не совершают опять таки потому, что расположение частей системы относительно друг друга не меняется (после того, как снаряд уже застрял). Из внешних сил совершают работу только силы кручения (сила тяжести и сила натяжения проволоки перпендикулярны направлению движения точек системы, а силами сопротивления воздуха мы пренебрегаем). Эта работа

определяется формулой  $A = \frac{1}{2} D \alpha_0^2$ . Приравняв ее изменению энергии  $\Delta E$ , получим

$$\frac{J \omega_0^2}{2} = \frac{D \alpha_0^2}{2}. \quad (32)$$

Из уравнений (31) и (32) можно составить систему

$$\left. \begin{aligned} mVl &= J \omega_0 \\ \frac{J \omega_0^2}{2} &= \frac{D \alpha_0^2}{2} \end{aligned} \right\}$$

решая которую, найдем скорость снаряда

$$V = \frac{\alpha_0}{ml} \sqrt{DJ}. \quad (33)$$

С другой стороны, известно, что квадрат собственной частоты крутильного маятника равен  $\omega^2 = \frac{D}{J}$ . Следовательно, момент инерции

$J = \frac{D}{\omega^2}$ . Формула (33) приобретает теперь такой вид

$$V = \frac{\alpha_0 D}{ml \omega}. \quad (34)$$

Чтобы избежать прямых измерений модуля кручения  $D$  круговую частоту колебаний маятника измеряют дважды: с двумя съемными грузами -  $\omega_1$  и без них -  $\omega_2$ . Из выражений для  $\omega_1^2$  и  $\omega_2^2$  можно составить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{D}{J} \\ \omega_2^2 &= \frac{D}{J - 2J_{zp}} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где  $J$  - момент инерции баллистического маятника,  $J - J_{zp}$  - момент инерции рамки без грузов. С другой стороны, по теореме Штейнера момент инерции одного груза равен  $J_{zp} = J_0 + M_{zp} l_1^2$ , где  $J_0$  - момент инерции груза относительно оси, проходящей через центр тяжести,  $M_{zp}$  - масса груза,  $l_1$  - расстояние от оси вращения рамки до центра груза. Так как первое слагаемое больше чем на порядок меньше второго, то можно положить  $J_{zp} = M_{zp} l_1^2$ .

Решая систему уравнений (35) относительно  $D$ , получим

$$D = \frac{2M_{cp}l_1^2\omega_1^2\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}. \quad (36)$$

После подстановки (6) в (4) и преобразований получим окончательную формулу для вычисления скорости снаряда

$$V = \frac{4\pi\alpha_0 M_{cp} l_1^2 T_1}{ml(T_1^2 - T_2^2)}, \quad (37)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  – периоды колебаний рамки с грузами и без них.

## Упражнение.

### Измерение скорости полета «снаряда».

**1) Измерение периода  $T_1$ .** Перед измерениями необходимо убедиться в том, что:

а) мишень находится на линии выстрела, а ее плоскость перпендикулярна траектории «снаряда»,

б) флажок рамки пересекает оптическую ось фотодатчика, а указатель положения рамки находится напротив деления  $0$ ,

в) съемные грузы находятся на рамке-маятнике и

зафиксированы винтами,

г) фотодатчик и электромагнит соединены с помощью кабеля с блоком электронного секундомера.

Если установка находится в состоянии, соответствующем условиям а)-г), то можно включить электронный секундомер. Выключатель «сеть» расположен на задней панели прибора слева. Одновременно с включением секундомера на катушку электромагнита поступает рабочее напряжение.

**ВНИМАНИЕ.** Для предотвращения перегрева катушки электромагнита время его непрерывной работы не должно превышать 15 секунд. Перерыв между измерениями должен быть

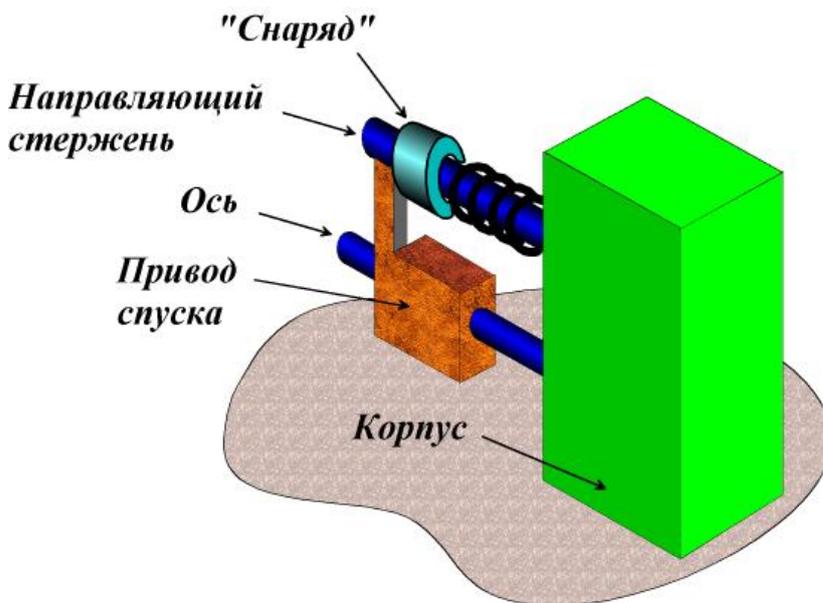


Рис.9

не менее 5 секунд. Включение электромагнита происходит при нажатии кнопок «СЕТЬ» и «СТОП».

Из предупреждения следует, что после включения секундомера следует сразу нажать кнопку «ПУСК», так как в этом состоянии прибора электромагнит обесточен. Индикатором нахождения прибора в состоянии «ПУСК» является светящаяся точка на индикаторе числа колебаний (см. рис. 8). Чтобы произвести выстрел, надо зарядить пушку. Для этого необходимо установить снаряд на направляющий стержень пускового устройства, и взвести пружину (см. рис. 9). Привод спуска имеет на оси два фиксированных положения, соответствующих различным состояниям натяжения пружины. При подготовке к выстрелу следует выбрать то положение, которое соответствует максимальному натяжению пружины. При натяжении пружины есть опасность опрокидывания установки. Поэтому «заряжать» пушку необходимо двумя руками: одной рукой удерживать от смещения корпус пушки, другой перемещать привод спуска. Перед выстрелом нажать кнопку «ПУСК». Выстрел производится путем поворота привода спуска вокруг оси. После выстрела следует визуально определить максимальный угол отклонения рамки  $\alpha_0$ , а с помощью секундомера – время десяти полных колебаний рамки  $t_{10}^1$ . Для остановки измерения времени и числа колебаний нажать кнопку «СТОП». Результаты измерений записать в таблицу.

Таблица

| № | $t_{10}^1, с.$ | $T_1, с.$ | $\alpha_0$ |      | $t_{10}^2, с.$ | $T_2, с.$ | $l, м.$ |
|---|----------------|-----------|------------|------|----------------|-----------|---------|
|   |                |           | град.      | рад. |                |           |         |
| 1 |                |           |            |      |                |           |         |
| 2 |                |           |            |      |                |           |         |
| 3 |                |           |            |      |                |           |         |
| 4 |                |           |            |      |                |           |         |
| 5 |                |           |            |      |                |           |         |
|   |                |           |            |      |                |           |         |

Измерения периода  $T_1$  выполнить пять раз. После пятого измерения выключить ток питания электромагнита (нажать кнопку «ПУСК», «снаряд» оставить в мишени).

**2) Измерение периода колебаний  $T_2$ .** Для измерения периода  $T_2$  необходимо:

- а) удалить с рамки-маятника два съемных груза,

б) ослабить гайку крепления электромагнита к платформе (гайка находится на нижней стороне платформы). Установить электромагнит таким образом, чтобы сердечник электромагнита располагался напротив отметки  $30^0$  и зафиксировать его в этом положении,

в) включить ток питания электромагнита (нажать кнопку «СТОП»),

г) плавным движением повернуть рамку в направлении к электромагниту до «прилипания» флажка к сердечнику,

д) нажать кнопку «ПУСК» и измерить время  $t^{2_{10}}$  десяти колебаний рамка-маятника без съемных грузов.

Результаты пяти измерений записать в таблицу. После окончания измерений  $T_2$  извлечь из мишени «снаряд» и измерить линейкой расстояние  $l$  от оси вращения рамки до центра отпечатка «снаряда» в пластине мишени. Значение  $l$  записать в таблицу.

Массу «снаряда»  $m$  и груза  $M_{sp}$  (среднее значение) следует определить взвешиванием на электронных весах.

Рассчитать скорость снаряда  $v$ . Для удобства расчетов перепишем формулу (37) еще раз.

$$V = \frac{4\pi\alpha_0 M_{sp} l_1^2 T_1}{ml(T_1^2 - T_2^2)},$$

где  $\alpha_0$  - среднее значение максимального угла отклонения рамки (рад.),

$M_{sp}$  - среднее значение массы груза (кг),

$m$  - масса «снаряда» (кг),

$l_1 = 0,0525$  м – расстояние от оси вращения рамки до центров масс грузов,

$l$  - расстояние от оси вращения рамки до центра отпечатка «снаряда» на пластине мишени (м),

$T_1$  и  $T_2$  - среднее значение периодов колебаний рамки с грузами и без них.

При составлении отчета вычислить абсолютную и относительную погрешности измерения скорости «снаряда».

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ.

- 1) Сформулируйте три закона Ньютона.
- 2) Сформулируйте закон сохранения импульса.
- 3) Какие силы называются потенциальными (консервативными) и непотенциальными (неконсервативными).

- 4) Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии.
- 5) Дайте определение момента инерции материальной точки.
- 6) Вычислите момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через цент масс. В каком случае при вычислении момента инерции используется теорема Штейнера?
- 7) Выведите формулу для вычисления кинетической энергии тела, вращающегося с постоянной скоростью вокруг неподвижной оси.
- 8) Дайте определение момента силы относительно неподвижной точки и относительно неподвижной оси. Каким образом определяется направление вектора момента силы?
- 9) Дайте определение момента импульса материальной точки относительно неподвижной точки и относительно неподвижной оси. Каким образом определяется направление вектора момента импульса?
- 10) Напишите уравнение моментов.
- 11) Напишите основные уравнения динамики поступательного и вращательного движения твердого тела.
- 12) Расскажите о назначении основных узлов экспериментальной установки.
- 13) Выведите расчетную формулу для вычисления скорости пули.
- 14) Укажите, какие законы сохранения используются при выводе расчетной формулы.

## **ЛИТЕРАТУРА.**

- 1 Белов Д.В. «Механика», изд. Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова 1998, глава III — Механика системы материальных точек, §§ 11 – 16.
- 2 Савельев И.В. «Курс физики», т. 1, глава 3, §§ 15, 16, 19, 21, 24, 26, 27.
3. Савельев И. В. «Курс общей физики» в 5-и книгах.  
Книга I «Механика», 1998 г.,  
гл. 3. Законы сохранения,  
§ 3.2 Кинетическая энергия и работа,  
§ 3.5 Потенциальная энергия во внешнем поле сил,  
§ 3.7 Закон сохранения энергии,  
§ 3.10 Закон сохранения импульса,  
§ 3.11 Соударение двух тел.