

Практический минимум по курсу теоретической механики

I. Формализм Лагранжа.

1. Найти число степеней свободы систем: материальная точка на сфере; две частицы, связанные невесомым стержнем; тонкий массивный стержень; молекула H_2O (с учётом электронных степеней свободы и без).
2. Выразить кинетическую энергию материальной точки в цилиндрических и сферических координатах.
3. Построить функцию Лагранжа систем: двойной математический маятник; частица на сфере в поле тяжести; заряд в однородных электрическом и магнитном полях; заряд в поле электрического диполя; заряд в поле магнитного диполя.
4. Построить уравнения Лагранжа для систем из п. 3.
5. Проинтегрировать уравнения Лагранжа для заряженной частицы в постоянных однородных электрическом и магнитном полях.

II. Законы сохранения.

1. Определить возможные типы движения и найти закон движения частицы массы m в потенциале $U(x) = U_0(e^{-2ax} - 2e^{-ax})$.
2. Найти законы сохранения для систем из п. I.3.
3. Качественно исследовать движение и проинтегрировать уравнения движения систем: частица массы m на сфере в поле тяжести; частица массы m в поле $U(r) = a/r^2$; заряд e массы m в магнитном поле бесконечного прямолинейного тока I .
4. Найти дифференциальное и полное сечения рассеяния частицы массы m : в поле $U(r) = a/r^2$; на упругом эллипсоиде вращения. Найти сечение падения частиц массы m на центр поля $U(r) = a/r - b/r^2$ ($a, b > 0$).

III. Малые колебания.

1. Исследовать систему на наличие положений устойчивого равновесия, построить функцию Лагранжа малых колебаний и найти нормальные колебания: двойного математического маятника; двух одинаковых математических маятников, массы которых соединены горизонтальной пружиной; молекулы CO_2 .
2. Найти период малых колебаний частицы из п. II.1.

IV. Движение твёрдого тела.

1. Найти ускорение центра масс однородного цилиндра при его скатывании по наклонной плоскости в поле тяжести (ось цилиндра горизонтальна, угол наклона плоскости α).
2. Найти период малых колебаний однородного полуцилиндра радиуса R на плоскости в поле тяжести.

V. Канонические методы.

1. Построить функцию Гамильтона и уравнения Гамильтона для систем из пп. I.3.
2. Найти закон движения системы, функция Гамильтона которой $H(p, q) = p^2 + q^2 + a(p^2 + q^2)^2$, $a = \text{const} > 0$.
3. Построить функцию Гамильтона релятивистской частицы массы m .
4. Найти уравнение траектории луча света в плоскости x, y , если показатель преломления среды $n(x, y) = ax$, $a = \text{const}$.
5. Найти каноническое преобразование, производящая функция которого $F(q, Q, t) = \frac{1}{2} m \omega(t) q^2 \text{ctg} Q$. Записать уравнения движения в переменных Q, P для гармонического осциллятора с частотой $\omega(t)$.
6. Проинтегрировать методом Гамильтона-Якоби движение систем: свободная частица; частица в однородном электрическом поле.