

СОДЕРЖАНИЕ

Часть 1. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Глава I. Свободные колебания

- §1. Свободные незатухающие колебания простых систем (гармонический осциллятор) 4
- §2. Свободные колебания связанных осцилляторов. Колебания молекул 22
- §3. Свободные затухающие колебания 41

Глава II. Вынужденные колебания

- §1. Вынужденные механические колебания при гармоническом внешнем воздействии 52
- §2. Вынужденные колебания в электрических цепях. Переменный ток 72
- §3. Резонансные явления в цепях переменного тока ... 88

Глава III. Волны

- §1. Упругие волны 98
- §2. Электромагнитные волны 115

Часть 2. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Глава IV. Интерференция света

- §1. Понятие об интерференции волн 130
- §2. Интерференция света. Схема Юнга 137
- §3. Степень когерентности. Временная и пространственная когерентность 144
- §4. Интерференция в тонких плёнках 160

Глава V. Дифракция света

§1. Понятие о дифракции света	170
§2. Дифракция Френеля на круглом отверстии и диске .	174
§3. Дифракция Фраунгофера на щели	188
§4. Роль дифракции в формировании оптических изображений	199
§5. Дифракционная решётка	206
§6. Характеристики дифракционной решётки как спектрального аппарата	216

Глава VI. Поляризация света

§1. Типы (виды) поляризации	224
§2. Поляризаторы. Закон Малюса	228
§3. Поляризация света в анизотропной среде	231
§4. Получение эллиптически поляризованного света ...	242
§5. Поляризация света при рассеянии	248
§6. Поляризация при отражении и преломлении света на границе раздела однородных прозрачных диэлектриков .	258
§7*. Искусственная оптическая анизотропия и интерференция поляризованного света	261
§8*. Оптическая активность	271

Глава VII*. Интерференционные методы в современном эксперименте

§1. Интерференционная рефрактометрия	280
§2. Интерференционные спектральные аппараты	283
§3. Интерференционные компараторы	287

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ «Колебания и волны»

“В науке необходимо воображение. Она не исчерпывается целиком ни математикой, ни логикой, в ней есть что-то от красоты и поэзии”

М. Митчелл, 1860

Глава I. Свободные колебания

§ 1. Свободные незатухающие колебания простых систем (гармонический осциллятор)

1.1. Понятие о колебательных процессах

Круг явлений, которые получили название «колебания» очень широк. Для всех этих явлений типична повторяемость во времени. Прежде чем перейти к детальному рассмотрению колебательных процессов, проиллюстрируем их универсальность несколькими примерами из живой и неживой природы.

Периодичны смены дня и ночи, времен года, сна и бодрствования. Сердце человека (и других млекопитающих) работает настолько периодически, что даже небольшие отклонения от этой периодичности резко ухудшают самочувствие, а их анализ позволяет специалистам судить о причинах нездоровья (кардиограммы). Качели и маятники хорошо знакомы нам с детства; шелест листьев обусловлен дрожанием каждого листика под действием ветра; волны, раз за разом накатывающие на берег, вызывают повторяющийся шум прибоя. Химикам хорошо

Глава I. Свободные колебания

известны удивительные циклические реакции – т.н. реакции Белоусова–Жаботинского. Периодичность наблюдается в “жизни” как гигантских объектов (таких, как планеты солнечной системы, звезды), так и микрочастиц – составных “кирпичиков” окружающего мира (атомов и молекул*). Наконец, само развитие мира, как считают некоторые философы, происходит “по спирали”, т.е. опять-таки с “некоторой степенью повторяемости во времени”. Да и в жизни отдельного человека периоды активности (работа, учеба, экзамены) сменяются процессами «релаксации» (термин, также относящийся к теории колебаний !) – расслабления и успокоения.

От «лирики» перейдём к сухой терминологии.

Так что же называют «колебательными процессами» или более коротко «колебаниями»? Определение, увы, прозвучит на этот раз несколько расплывчато:

► **“Опр.”** *Колебаниями называются процессы, обладающие в той или иной мере свойством повторяемости во времени*

Расплывчатость эта вынужденная. Дело в том, что колебания бывают, как процессами строго

*) «Колебательный спектр» молекулы является её паспортом !

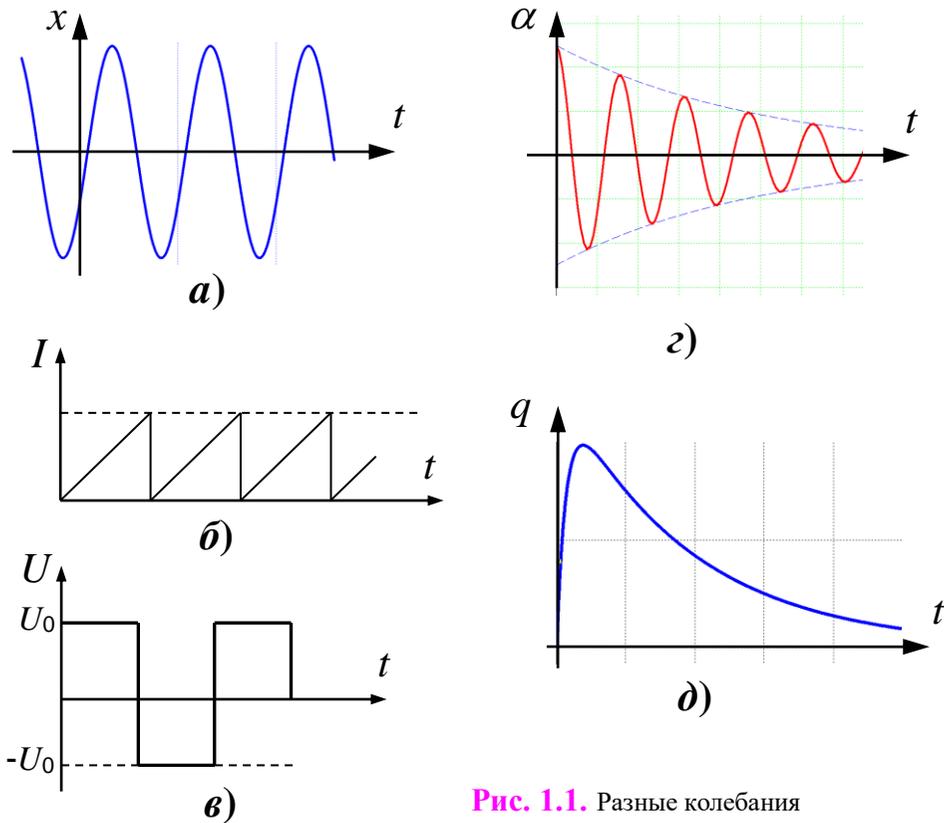


Рис. 1.1. Разные колебания

периодическими – см. примеры $a - в$ на рис. 1.1, так и почти периодическими – см. пример $г$ на рис. 1.1. И даже совсем уж непериодическими – как говорят, «апериодическими» (см. пример $д$ на рис. 1.1), которые также изучаются в теории колебаний. Последний случай называется «релаксацией» и может, как это ни странно на первый взгляд, наблюдаться в той же колебательной системе (например, у маятника), в которой протекают процессы a или $г$, но при значительном увеличении в

Глава I. Свободные колебания

ней затухания. В механической системе это произойдёт при увеличении вязкости окружающей среды.

В примерах на рис. 1.1 оси ординат обозначены разными буквами. Дело в том, что колебательный характер изменений может наблюдаться для самых разных физических величин: x , \dot{x} (т.е. проекция скорости V_x), q , I , \vec{E} , \vec{B} и т.д. Смысл этих обозначений нам уже понятен после изучения разделов «Механика» и «Электричество». Обсуждая общие свойства колебательных процессов в различных системах, договариваются использовать обобщающее обозначение для всех подобных величин – букву «кси»: ξ . Нас в дальнейшем будут интересовать не столько физическая природа изменяющихся с течением времени приведённых величин, сколько специфические закономерности, характеризующие колебательный процесс в целом. Такой подход к механическим, электрическим, электромагнитным колебаниям используется в *теории колебаний*. В ней используется единый подход к колебаниям различной физической природы.

В этой науке принято различать колебания свободные и вынужденные. *Свободные протекают под действием внутренних сил (причин) колебательной системы.*

Вынужденные – при внешнем периодическом воздействии.

*)

Приступим к обсуждению этих процессов по порядку. Для начала будем считать, что состояние колебательной системы (“осциллятора” – от английского глагола “to oscillate” – колебаться) определяет всего одна величина ξ и её производная по времени $\dot{\xi}$ – это случай т.н. «одномерного осциллятора».

1.2. Модель “гармонический осциллятор”. “Кинематика” гармонических колебаний

Обсудим, прежде всего, модельный случай – так называемый «гармонический осциллятор».

► **“Опр.”** *Колебания называются гармоническими, если они происходят по закону синуса или косинуса:*

$$\xi(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.1)$$

Это строго периодический процесс, который может протекать при свободных колебаниях, если выполнены определённые упрощающие допущения, о которых мы скажем позже.

Здесь A – амплитуда колебаний. Аргумент гармонической функции $(\omega t + \varphi_0)$ (может быть и косинус!) называется фазой, а φ_0 – *начальной фазой* колебаний, соответственно. Величина ω_0 –

*) В теории колебаний выделяют также ещё два особых случая – «параметрические» и «автоколебания». Их анализ выходит за рамки нашей программы.

Глава I. Свободные колебания

циклическая (она же «круговая»^{*)}) частота свободных незатухающих колебаний. Она простым образом связанная с периодом колебаний системы: $\omega_0 = 2\pi/T_0$.

Продифференцируем функцию $\xi(t)$ по времени два раза:

$$\ddot{\xi}(t) = -\omega_0^2 \cdot A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad \ddot{\xi}(t) = -\omega_0^2 \cdot \xi(t).$$

Мы видим, что вторая производная $\ddot{\xi}(t)$ пропорциональна самой колеблющейся величине $\xi(t)$. Квадрат собственной частоты может быть найден из коэффициента пропорциональности между $\ddot{\xi}$ и ξ (то есть между ускорением и смещением в случае механического осциллятора):

$$\omega_0^2 = -\frac{\ddot{\xi}}{\xi}. \quad (1.2)$$

1.3. “Динамика” гармонических колебаний

На пути к выявлению общих закономерностей весьма полезной является опора на простейший случай механических колебаний. Если ξ – это смещение тела вдоль некоторой оси OX , то её вторая производная – проекция ускорения на эту ось. Но из 2-го закона Ньютона мы знаем, что она в свою очередь пропорциональна действующей на тело силе (её проекции, конечно). Таким образом, знание

^{*)} Именно с такой угловой скоростью вращается вектор \vec{A} , проекции которого на координатные оси OX и OY описываются гармоническими функциями $A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ и $A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ соответственно.

динамики позволяет предположить, что колебание окажется гармоническим, если действующая на тело сила пропорциональна его отклонению от некоторого положения, для которого эта сила равна нулю – положения равновесия:

$$F_x = -k\xi. \quad (1.3)$$

Видно, что знак проекции силы всегда противоположен знаку *смещения*. Поэтому такую силу называют *возвращающей*. В случае *малых отклонений* сила пропорциональна смещению из положения равновесия (как для идеальной пружины). Поэтому такую силу называют также «*квазиупругой*». В частном случае колебаний грузика на пружине эта сила просто тождественна упругой силе, меняющейся в соответствии с законом Гука.

Второй закон Ньютона для механической системы, находящейся вблизи положения равновесия, с учётом вышесказанного можно записать в виде

$$m\ddot{\xi} = -k\xi. \quad (1.4)$$

После деления на массу и переноса в левую часть, это равенство приобретает форму:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0, \quad \text{где} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (1.4,a)$$

Равенство (1.4,a) называется «*уравнением гармонического осциллятора*». С математической точки зрения, это

Глава I. Свободные колебания

линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Общее решение такого уравнения как раз и представляет собой гармоническую функцию:

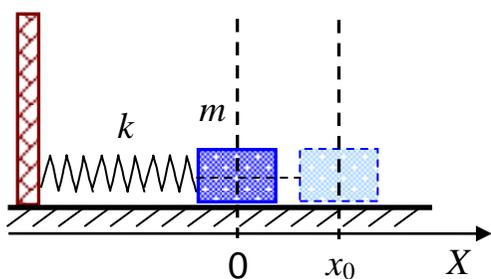
$$\xi(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.5)$$

В этом нетрудно убедиться прямой подстановкой.

Примеры простейших механических и электрических гармонических осцилляторов

Пример 1.3.1. Пружинный маятник

На рис. 1.2 показан простейший механический осциллятор – тело массой m на пружине с коэффициентом упругости k , которое может скользить по **гладкой** горизонтальной поверхности. Уравнение движения тела (второй закон Ньютона) в этом случае



(в отсутствии сил трения) в точности совпадает с ранее записанным нами уравнением (1.4):

$$m\ddot{\xi} = -k\xi.$$

Частота свободных («собственных»)

Рис. 1.2. Пружинный маятник

незатухающих колебаний определяется в этом случае жёсткостью пружины и массой груза:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.6)$$

Эта частота такая же, конечно, и в случае вертикального расположения пружины с грузом. Роль

дополнительной постоянной силы – силы тяжести (в первом случае её уравнивала сила реакции опоры) – сводится лишь к смещению положения равновесия – в этом положении пружина растянута на величину $x_0 = mg/k$. Попробуйте самостоятельно привести уравнение движения к каноническому виду гармонического осциллятора в этом случае.

Пример 1.3.2. Математический маятник

Найдём теперь закон и частоту малых свободных колебаний математического маятника – материальной точки массой m , закреплённой на длинном невесомом подвесе длины l – см. рис. 1.3.

При отклонении маятника от положения устойчивого равновесия (сила тяжести находится на вертикали под точкой подвеса) возникает момент силы тяжести \vec{N}_{mg} («от нас» для положения на рисунке), направленный против вектора его углового смещения $\vec{\alpha}$ («на нас»). Уравнение динамики вращательного движения имеет вид:

$$I_z \cdot \ddot{\alpha} = -mgl \cdot \sin \alpha . \quad (1.7)$$

Здесь I_z – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса. Это уравнение записано в проекциях на ось, перпендикулярную к

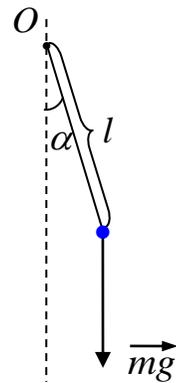


Рис. 1.3.
Математический маятник

Глава I. Свободные колебания

плоскости рисунка и знак минус здесь обусловлен тем, что направления **векторов** момента силы тяжести и углового смещения всегда противоположны. Это дифференциальное уравнение относительно $\alpha(t)$, которое *не является линейным*. Однако при малых углах ($\alpha \ll 1$) $\sin \alpha \approx \alpha^*$ и уравнение приобретает знакомую форму (2.1):

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I_z} \cdot \alpha = 0. \quad (1.8)$$

Сравнивая это соотношение с уравнением (1.4a), и учитывая, что момент инерции материальной точки равен ml^2 , получаем частоту **собственных незатухающих** колебаний математического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (1.9)$$

❖ Примечание

Если размер тела сопоставим с длиной подвеса, маятник называется «физическим». Уравнение (1.8) для него остаётся в силе. Только в этом случае l – расстояние от точки подвеса до центра тяжести тела. И собственная частота оказывается равной:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I_z}}. \quad (1.9,a)$$

Для большей наглядности мы начали с механических колебательных систем. *Гармоническим осциллятором* является любая система, совершающая

*) Заметим, что если углы отклонения не превышают $0,1 \text{ рад}$ ($5,7^\circ$), то отличие $\sin \alpha$ от радианной меры угла α составляет всего 0,2%.

колебания по закону (1.5) и, соответственно, подчиняющаяся уравнению вида (1.4,*a*). Следующий пример демонстрирует аналогию в описании механических и электрических колебаний.

Пример 1.3.3. Колебательный контур

Для идеализированного электрического колебательного контура без потерь энергии (см. рис. 1.4) разность потенциалов между обкладками конденсатора равна $V_c = \frac{q}{C}$ (вспомните определение электроёмкости C). В соответствии со вторым

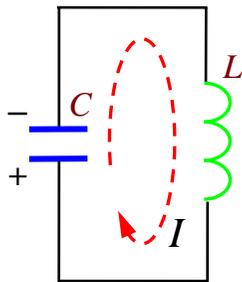


Рис. 1.4. Колебательный контур

правилom Кирхгофа её следует приравнять ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_{si} , возникающей в катушке индуктивности:

$$\frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt} \quad *). \quad (1.10)$$

Сила тока в контуре равна $I = \frac{dq}{dt}$

и, с учётом $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \equiv \ddot{q}$, получаем уравнение:

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{q} + \omega_0^2q = 0, \quad (1.10,a)$$

*) Здесь использован также знакомый нам закон электромагнитной индукции.

Глава I. Свободные колебания

где q и C – заряд и электроёмкость конденсатора, L – индуктивность катушки. Собственная частота незатухающих колебаний в контуре, таким образом, равна:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (1.11)$$

❖ Замечания

1) Выявленная выше связь $\omega_0^2 = -\frac{\gamma r}{\zeta r}$ позволяет утверждать, что частота свободных незатухающих колебаний определяется только свойствами колебательной системы (жёсткостью пружины, массой груза, длиной нити, электроёмкостью, индуктивностью, ...) и не зависит от способа возбуждения колебаний в ней.

2) Напротив, амплитуда и начальная фаза (A и φ_0) существенно зависят от *способа* возбуждения колебаний в системе – так называемых *начальных условий*. Для определения амплитуды и начальной фазы нужно знать начальное отклонение системы от положения равновесия $\xi(0)$ и значение $\dot{\xi}(0)$ (начальную скорость v_0 в механическом случае).

1.4. Энергия гармонического осциллятора

Поговорим теперь об энергии, “запасённой” гармоническим осциллятором. Запишем энергию колебаний для двух, приведённых выше, примеров – пружинного маятника и колебательного контура. Начнём с механической системы – маятника. Её

полная энергия складывается из *потенциальной* энергии деформированной пружины и *кинетической* энергии груза:

$$W = \frac{k\xi^2}{2} + \frac{m\dot{\xi}^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.12)$$

Обе составляющие, как нетрудно видеть, меняются в процессе колебаний. Причём эти изменения носят также периодический характер – только с вдвое большей частотой относительно среднего значения $\frac{kA^2}{4}$ и происходят в противофазе друг к другу (см. рис. 1.5):

$$W_{\text{п}}(t) = \frac{kA^2}{4} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)]; \quad (1.13, a)$$

$$W_{\text{к}}(t) = \frac{kA^2}{4} [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)]. \quad (1.13, б)$$

Здесь мы воспользовались известными тригонометрическими соотношениями «понижения степени» (или «перехода к двойному аргументу»). Кроме того, в последнем равенстве учли, что $m\omega_0^2 = k$.

А что же происходит с полной энергией? Она остаётся неизменной и равной $\frac{kA^2}{2}$. Разные формы механической энергии лишь переходят из одной в другую – это хорошо иллюстрируют графики на рис.

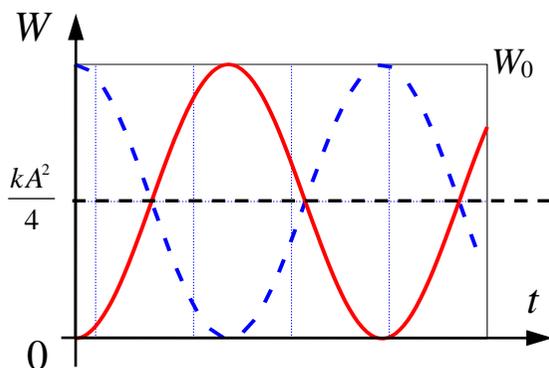


Рис. 1.5. Энергия гармонических колебаний

1.5 – и это с тем же успехом легко получить из сложения равенств (1.13,а) и (1.13,б).

Надо сказать, что этот результат вполне ожидаем – мы ведь предполагали отсутствие диссипативных сил (силы трения) – потерь энергии нет, если все действующие в системе силы консервативны.

Электромагнитная энергия, запасённая в колебательном контуре, также может быть представлена в виде двух составляющих:

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{q^2}{2C} + \frac{L\dot{q}^2}{2}. \quad (1.14)$$

Её электрическая и магнитная составляющие:

$$W_e = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$W_m = \frac{Lq_m^2 \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

меняются периодическим образом по законам:

$$W_e = \frac{q_m^2}{4C} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)], \quad (1.14,а)$$

$$W_m = \frac{q_m^2}{4C} [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)]. \quad (1.14, б)$$

То есть энергия электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки индуктивности также колеблется в противофазе с частотой $2\omega_0$ относительно значения $\frac{q_m^2}{4C}$ (q_m – максимальный заряд конденсатора в процессе колебаний) с сохранением полной энергии, которая равна $\frac{q_m^2}{2C}$ (но с тем же успехом может быть записана и через амплитудное значение силы тока $\frac{LI_m^2}{2}$).

Полученный результат – также прямое следствие договорённости считать электрическое сопротивление проводов контура пренебрежимо малым и не учитывать иные возможные причины потерь электромагнитной энергии (на перемагничивание среды внутри соленоида, например).

❖ **Замечания**

1. Нетрудно подметить аналогию для величин, используемых при описании колебаний в механических и электрических системах. Для удобства мы свели их в таблицу 1.1:

Глава I. Свободные колебания

Таблица 1.1

<i>Механический осциллятор</i>	<i>Электрический осциллятор</i>
Смещение, x (или α)	заряд, q
скорость, \dot{x} (или $\dot{\alpha}$)	сила тока, I (или \dot{q})
потенциальная энергия $U = \frac{kx^2}{2}$	энергия электрического поля конденсатора $W_e = \frac{q^2}{2C}$
кинетическая энергия $T = \frac{mv^2}{2}$	энергия магнитного поля катушки $W_m = \frac{LI^2}{2}$
масса, m	индуктивность, L
жёсткость пружины, k	величина, обратная ёмкости конденсатора, $1/C$
<i>Сила (момент силы)</i>	<i>ЭДС</i>

Знание подобных аналогий во многих случаях может помочь предвидеть тот или иной результат. Но важно понимать, что сами по себе они не заменяют конкретного анализа колебательной системы.

2. Каждая из компонент энергии колебаний и, конечно, их сумма оказываются **пропорциональными квадрату амплитуды колебаний** ($W \sim A^2$). Этот результат нам не раз ещё придётся использовать в дальнейшем.

Дополнение к § 1

1.5*. Особенности колебаний нелинейного осциллятора

Мы отметили выше широкую распространённость колебательных явлений в природе. Мы обсудили ряд типичных примеров гармонических колебаний. В чём же состоит физическая причина такой ситуации?

Вспомним, что фундаментальную роль в окружающем нас мире играют гравитационные, упругие и электростатические взаимодействия. Возникающие при этом силы обладают одним важным общим свойством – они являются силами консервативными. Если реально существующее в механических системах трение очень мало, а в электрических мало сопротивление^{*)}, то такие системы можно считать консервативными. Это и позволяет на начальном этапе нашего анализа – в модели «гармонический осциллятор» – пренебрегать потерями колебательной энергии.

Попробуем выяснить, почему действующая «сила» (или её аналог) часто оказывается «квазиупругой». Пусть система характеризуется её потенциальной энергией $U(x)$. На рис. 1.6 представлено три варианта такой функции. Вспомним, что в механическом случае, первая производная потенциальной энергии по координате равна проекции действующей на тело силы ($\vec{F} = -gradU$). Тогда случай “а” будет соответствовать равномерному движению (сила равна нулю!), а случай “б” – движению с постоянным ускорением. Оба – никак не соответствуют протеканию «повторяющегося» процесса, т.е. колебанию. В третьем примере “в” представлена довольно сложная зависимость, но важно то, что она имеет хотя бы один минимум (может быть локальный). Вблизи соответствующего значения x , обозначим его x_0 , функцию $U(x)$ можно разложить в ряд Тейлора по малому аргументу $x - x_0$:

$$U(x) = U(x_0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)^2 + \dots \quad (1.12)$$

Или, если использовать обозначение $\xi = x - x_0$:

^{*)} И некоторыми другими процессами, связанными с переходом электромагнитной энергии в тепловую.

Глава I. Свободные колебания

$$U(\xi) = U(0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{\xi=0} \cdot \xi + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{\xi=0} \cdot \xi^2 + \dots \quad (1.12,a)$$

Величина ξ , как видим, имеет смысл смещения из положения минимума потенциальной энергии – положения равновесия. Очевидно, при малых отклонениях от точки x_0 основную роль будет играть слагаемое с наименьшей степенью ξ . Учитывая, что в минимуме $dU/dx = 0$, разложение (1.12) приближенно можно переписать в виде:

$$U(\xi) \approx U(0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{\xi=0} \cdot \xi^2 = U(0) + \frac{k\xi^2}{2}, \quad (1.12,b)$$

Здесь мы ввели обозначение $k = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{\xi=0}$. В этом случае вблизи точки $x = x_0$

в системе будет действовать сила, равная $F_x = -\frac{dU}{dx}$, т.е. как раз квазиупругая сила $F_x = -k\xi$!

Если вернуться к виду зависимости $U(x)$, то это означает, что она может быть аппроксимирована параболой. И это справедливо практически всегда при малых амплитудах колебаний.

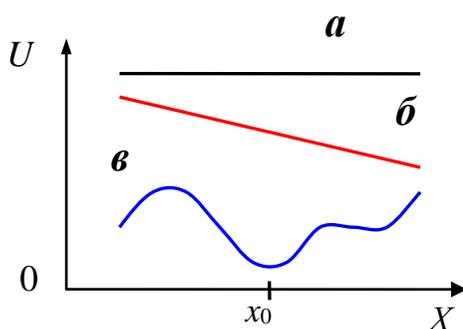


Рис. 1.6. Потенциальная энергия

При увеличении амплитуды уже не удаётся ограничиться учётом лишь двух членов в разложении потенциальной энергии. Очевидно, её производная перестаёт быть линейной функцией ξ . И даже консервативная система описывается в этом случае существенно более сложным нелинейным дифференциальным уравнением:

$$\ddot{\xi} + f(\xi) = 0, \quad \text{где} \quad f(\xi) = -k \cdot \xi + k_2 \cdot \xi^2 + k_3 \cdot \xi^3 + \dots \quad (1.13)$$

Осциллятор становится нелинейным. Он уже не может быть описан простой гармонической функцией. Можно сказать, что в его решении, помимо «основного тона», появляются дополнительные «гармоники»:

$$\xi(t) = A_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) + A_2 \cdot \cos(2\omega t + \varphi_{02}) + A_3 \cdot \cos(3\omega t + \varphi_{03}) + \dots \quad (1.14)$$

Это *ангармоническое* колебание. Его важной особенностью является *неизохронность*. В отличие от изохронного гармонического, его период зависит от амплитуды.

В заключение данного параграфа подчеркнём, что гармонический осциллятор – физическая идеализация. Модель гармонического осциллятора может быть использована *только* в тех случаях, когда правомерно пренебрежение членами высших порядков в разложении потенциальной энергии системы (1.1) (т.е. когда амплитуда колебаний достаточно мала) *и отсутствуют диссипативные силы (например, силы трения)*.

§ 2. Свободные колебания связанных осцилляторов. Колебания молекул

2.1. Симметричная система двух связанных механических осцилляторов. Нормальные колебания

Будем по-прежнему иметь в виду актуальную для химика аналогию с миром атомов и молекул. Эти частицы чаще всего встречаются не по отдельности (разреженные среды), а взаимодействуют друг с другом в различных молекулярных системах («конденсированных состояниях вещества»^{*)}. Попробуем учесть такое взаимодействие, рассмотрев для начала простейшую ситуацию, когда взаимодействующие системы совершенно одинаковы – т.е. система симметрична. Уже в ней проявят себя основные особенности задачи.

^{*)} В электрических цепях этому соответствуют связанные между собой LC-контуры.

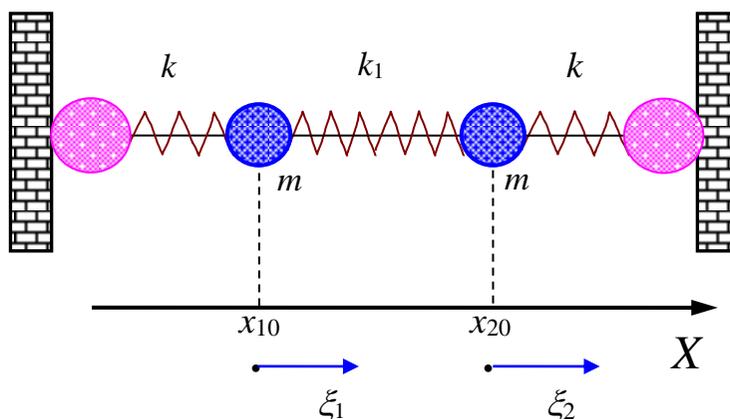


Рис. 2.1. Симметричная система связанных осцилляторов

Такая модель представлена нами на рисунке 2.1. Отметим её особенности и наши допущения:

1) Взаимодействующие молекулы-осцилляторы одинаковы – система симметрична;

2) Крайние атомы будем пока считать неподвижными за счёт их большой инертности или прочной связи с другими массивными частицами (например, на поверхности твёрдого тела);

3) Мы предполагаем по-прежнему возможность движения лишь вдоль оси OX – одномерный случай;

4) Трением пренебрегаем – система консервативна;

5) Все связи квазиупругие. Средняя пружинка жёсткости k_1 моделирует взаимодействие (химическую связь) между молекулами – осцилляторами:

$$k_1 = \left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{\substack{x_1 = x_{10} \\ x_2 = x_{20}}}$$

Запишем, как обычно, уравнения движения каждого атома, используя сразу в качестве переменных смещения атомов из положения равновесия: $\xi_1 = x_1 - x_{10}$, $\xi_2 = x_2 - x_{20}$:

$$m \ddot{\xi}_1 = -k\xi_1 + k_1(\xi_2 - \xi_1), \quad (2.1)$$

$$m \ddot{\xi}_2 = -k\xi_2 - k_1(\xi_2 - \xi_1). \quad (2.2)$$

Мы видим, что уравнения содержат сразу по две разные функции $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ – это НЕ уравнения гармонического осциллятора! Однако математический приём, позволяющий перейти к одной функции в каждом из уравнений, для простейшего симметричного случая несложен – сначала поделим каждое уравнение на соответствующую массу, а затем сложим и вычтем почленно эти уравнения. Новые функции $\xi_I = \xi_1 + \xi_2$ и $\xi_{II} = \xi_2 - \xi_1$ называются **нормальными координатами** – они "переводят" исходные уравнения в уравнения гармонического осциллятора:

$$\ddot{\xi}_I = -\frac{k}{m} \xi_I, \quad (2.3)$$

$$\ddot{\xi}_{II} = -\frac{k + 2k_1}{m} \xi_{II}. \quad (2.4)$$

➡ **“Опр.”** *Нормальными координатами называются линейные комбинации истинных координат, которые позволяют свести исходную систему уравнений к системе уравнений гармонических осцилляторов*

Вид решений этих уравнений нам уже хорошо

Глава I. Свободные колебания

известен. Они представляют собой так называемые "нормальные колебания" или "моды колебаний":

$$\xi_I(t) = A_I \cos(\omega_I t + \varphi_{0I}), \quad (2.5, a)$$

$$\xi_{II}(t) = A_{II} \cos(\omega_{II} t + \varphi_{0II}). \quad (2.5, б)$$

А соответствующие частоты – частоты нормальных колебаний:

$$\omega_I = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \omega_{II} = \sqrt{\frac{k + 2k_1}{m}}. \quad (2.6)$$

Принято нумеровать моды в порядке возрастания частоты. Константы A_I и A_{II} и φ_{0I} и φ_{0II} – амплитуды и начальные фазы соответствующих нормальных колебаний.

Чтобы понять, как движутся сами шарики-атомы, надо вернуться к исходным функциям – смещениям $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ при помощи нехитрых формул "обратного перехода":

$$\xi_1 = \frac{\xi_I - \xi_{II}}{2} \quad \text{и} \quad \xi_2 = \frac{\xi_I + \xi_{II}}{2}. \quad (2.7)$$

Выпишем теперь наши решения в общем виде:

$$\xi_1(t) = \frac{1}{2} [A_I \cos(\omega_I t + \varphi_{0I}) - A_{II} \cos(\omega_{II} t + \varphi_{0II})], \quad (2.8)$$

$$\xi_2(t) = \frac{1}{2} [A_I \cos(\omega_I t + \varphi_{0I}) + A_{II} \cos(\omega_{II} t + \varphi_{0II})]. \quad (2.9)$$

Являются ли эти колебания гармоническими? В общем случае, очевидно, нет – это довольно сложные процессы, представляющие собой суперпозицию колебаний с разными частотами, амплитудами и фазами.

Связанные осцилляторы

Однако некоторые способы возбуждения колебаний приведут к возникновению в системе лишь простейших колебательных движений – гармонических колебаний с частотой одной из двух мод. Например, если оба шарика-атома сместить на одинаковое расстояние в одну сторону и отпустить без толчка, возникнут "синфазные" ("асимметричные") колебания (см. рис. 2.2,*a*) с частотой $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Как видим, средняя пружинка совсем не участвует в этом процессе. Если же их сместить в противоположные стороны и отпустить, то возникнут противофазные (симметричные)

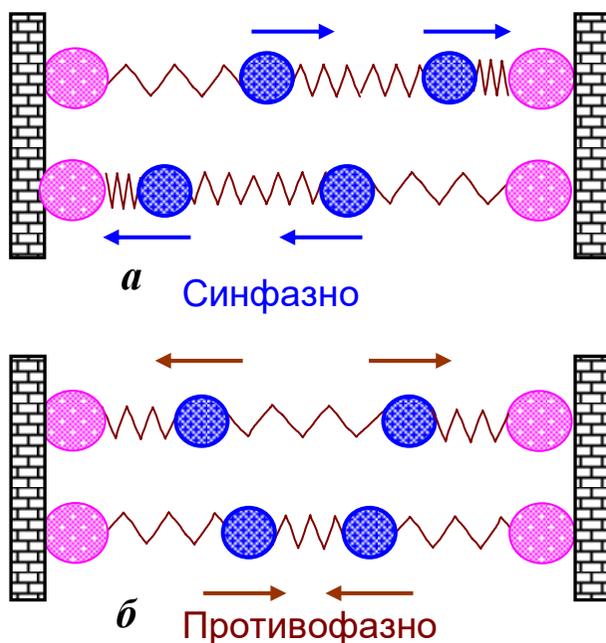


Рис. 2.2. Нормальные колебания ("моды").

Глава I. Свободные колебания

с частотой $\omega_{II} = \sqrt{\frac{k + 2k_1}{m}}$ – см. рис. 2.2,б. На этот раз участие средней пружинки очевидно и её жёсткость учтена с коэффициентом «2». Придумайте самостоятельно, какими ещё способами возбуждения можно добиться таких же колебательных движений.

В общем случае, чтобы найти постоянные A_I и A_{II} и φ_{0I} и φ_{0II} необходимо записать 4 уравнения для смещений атомов и их скоростей в начальный момент времени. Решив эти алгебраические уравнения, мы и получим недостающую информацию о процессе.

❖ Замечания

1. При анализе часто выделяют особый случай, когда связь между осцилляторами мала, то есть выполняется условие $k_1 \ll k$. В такой системе

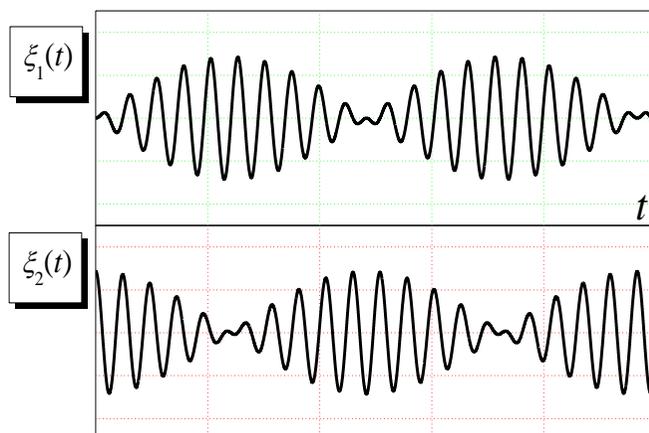


Рис. 2.3. Биения.

наблюдаются так называемые «биения» – осцилляторы попеременно достигают максимальных амплитуд колебаний, обмениваясь колебательной энергией – см. рис. 2.3.

2. Обмен энергией колебаний осцилляторов при биениях и при более сильной связи вовсе не означает обмен энергией между модами. Моды остаются энергетически независимы – если возбуждена одна из них, то в системе происходят нормальные колебания только на частоте возбуждённой моды!

3. Для несимметричной системы простой математический приём сложений и вычитаний уравнений уже «не работает». Следует предположить, что вклад каждого осциллятора в нормальные координаты разный. Поэтому нормальные координаты можно пробовать искать в виде $\xi_{I,II} = \xi_1 + n_{I,II} \cdot \xi_2$, где $n_{I,II}$ – постоянный коэффициент, значение которого для каждой моды своё. Каждому значению этого коэффициента будет соответствовать определенная мода $\xi_{I,II}$ и частота нормальных колебаний $\omega_{I,II}$.

Возможен и другой способ поиска частот нормальных колебаний. Он базируется на том обстоятельстве, что при возбуждении в системе какой-либо одной моды осцилляторы совершают

Глава I. Свободные колебания

колебания с одинаковой частотой, причём либо в фазе, либо в противофазе. В исходную систему дифференциальных уравнений можно подставить для смещений осцилляторов гармонические функции $\xi_1(t) = A \cdot \cos(\omega_{I,II}t)$ и $\xi_2(t) = B \cdot \cos(\omega_{I,II}t)$. Очевидно, знаки A и B совпадают для синфазной моды и, наоборот противоположны, для противофазной. В результате решения получившихся алгебраических уравнений определяют частоты нормальных колебаний, а также и отношения амплитуд A/B для каждой моды.

2.2. Связанные колебательные контуры

Покажем общность способов описания колебательных процессов и для случая электрических связанных систем. В идеализированных изолированных колебательных контурах с пренебрежимо малыми потерями (на выделение тепла Джоуля - Ленца при протекании тока по участкам с омическим сопротивлением, прежде всего) происходят гармонические колебания зарядов на конденсаторах и сил токов с частотами, определяемыми электроёмкостью конденсатора и индуктивностью катушки $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ (рис. 2.4,а). Связь между контурами можно "организовать" либо через общий конденсатор ("ёмкостная") либо через катушку ("индуктивная").

Рассмотрим для определённости первый случай – рис. 2.4,б. Если оба контура включают одинаковые

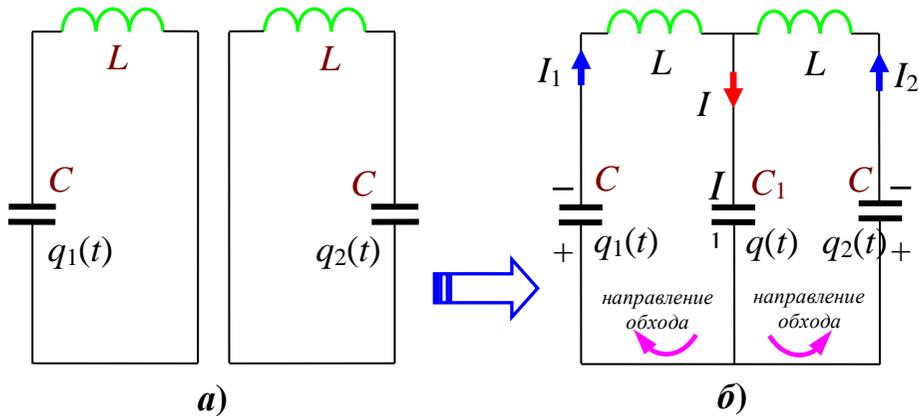


Рис. 2.4, а) Два несвязанных контура и б) контуры с ёмкостной связью.

элементы, то получим, очевидно, симметричную систему – аналог рассмотренной механической.

Пусть в некоторый момент времени распределение знаков зарядов на обкладках конденсаторов соответствует указанному на рисунке. Тогда, выбрав направление обхода контуров, как показано стрелками на рисунке, можно записать равенства, соответствующие второму правилу Кирхгофа^{*)}:

$$-L \frac{dI_1}{dt} = \frac{q_1}{C} + \frac{q}{C_1}, \quad (2.10)$$

$$-L \frac{dI_2}{dt} = \frac{q_2}{C} + \frac{q}{C_1}. \quad (2.11)$$

Закон сохранения заряда позволяет связать модули зарядов обкладок конденсаторов:

$$q_1 + q_2 = q. \quad (2.12)$$

Учтём, кроме того, связь сил токов с этими зарядами:

^{*)} Для проведения аналогий с механическим случаем удобнее начинать равенство с ЭДС в контуре.

Глава I. Свободные колебания

$$I_1 = \frac{dq_1}{dt} \equiv \dot{q}_1, \quad I_2 = \frac{dq_2}{dt} \equiv \dot{q}_2. \quad (2.13)$$

После подстановок и замен получим систему дифференциальных уравнений относительно функций изменения во времени зарядов только крайних конденсаторов:

$$-L\ddot{q}_1 = \frac{q_1}{C} + \frac{q_1 + q_2}{C_1}, \quad (2.10,a)$$

$$-L\ddot{q}_2 = \frac{q_2}{C} + \frac{q_1 + q_2}{C_1}. \quad (2.11,a)$$

Система также не является системой уравнений гармонических осцилляторов, но, как и в механическом случае, аналогичными математическими действиями может быть преобразована к ним:

$$\ddot{q}_I + \frac{1}{LC}q_I = 0, \quad (2.14)$$

$$\ddot{q}_{II} + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_1} \right) q_{II} = 0. \quad (2.15)$$

При этом мы перешли к новым функциям – нормальным координатам: $q_I = q_1 - q_2$, $q_{II} = q_1 + q_2$. Нормальные колебания, очевидно, имеют вид:

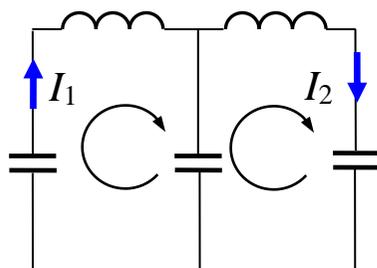
$$q_I = Q_I \cdot \cos(\omega_I t + \varphi_{0I}), \quad \text{где } \omega_I^2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (2.16)$$

$$q_{II} = Q_{II} \cdot \cos(\omega_{II} t + \varphi_{0II}), \quad \text{где } \omega_{II}^2 = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_1} \right). \quad (2.17)$$

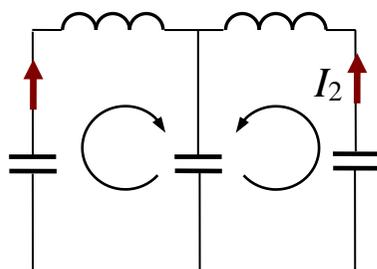
Как и в механической системе, возбудить такие колебания можно, выбрав соответствующие начальные условия. При возбуждении в рассматриваемой системе первой (синфазной) моды токи одинаковой силы I_1 и I_2 в обоих контурах в любой момент времени направлены либо по часовой стрелке, либо против неё. Поэтому ток через конденсатор C_1 не протекает, он не перезаряжается и вообще не участвует в процессе.

Колебания зарядов крайних конденсаторов будут происходить симметрично (противофазно), если, например, сначала зарядить их одинаково, после чего замкнуть цепь в каждом контуре. Сила тока через конденсатор C_1 в любой момент времени равна удвоенному значению силы тока I_1 (или I_2).

На рис. 2.5 показаны направления токов в двух контурах в некоторый произвольный момент времени для первой низкочастотной (а) и второй высокочастотной (б) моды.



а) Синфазно



б) Противофазно

Рис. 2.5. Нормальные колебания.

В общем случае возбуждены обе моды и колебания заряда каждого конденсатора представляют собой их суперпозицию. Как видим, в электрическом случае, мы встречаемся с теми же законами и особенностями

Глава I. Свободные колебания

колебательных процессов, что и в механическом. Мы уже отмечали аналогию таких величин как смещение и заряд, скорость и сила тока, масса и индуктивность, а также и чуть более сложную: между жёсткостью пружины и обратной электроёмкостью конденсатора.

2.3. Колебания молекул

2.3.1. Двухатомные молекулы

Обсуждение актуального для нас вопроса «Колебания молекул» начнём со случая двухатомной молекулы. Убедимся, что по сути, это «вырожденный» случай уже рассмотренных нами колебаний в системе связанных осцилляторов.

Моделью такой молекулы может служить система, состоящая из двух маленьких шариков с массами m_1 и m_2 , соединённых пружинкой жёсткости k , которые могут скользить без трения по горизонтальной спице – см. рис. 2.6. Для описания положения каждого из шариков-атомов достаточно, очевидно,

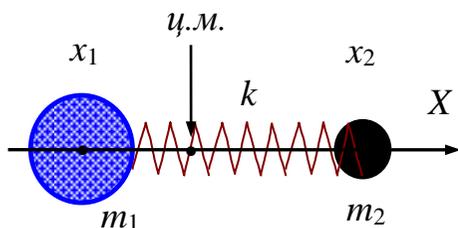


Рис. 2.6. Двухатомная молекула.

всего одной координатной оси OX , которую мы направим горизонтально (вправо на нашем рисунке). Если координаты шариков в положении равновесия (т.е. при недеформированной пружине) обозначить x_{10} и x_{20} , а

длину недеформированной пружины $l_0 = x_{20} - x_{10}$, то уравнения движения грузов по оси OX можно записать в виде:

$$m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l_0), \quad (2.18)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0). \quad (2.19)$$

Величина, записанная в скобках, равна, очевидно, деформации пружины в процессе колебаний. В каждое уравнение входят обе функции – $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Но мы уже знаем способ, как преодолеть такую математическую трудность. Вычтем из уравнения (2) уравнение (1), поделив предварительно каждое на соответствующую массу:

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\left(\frac{k}{m_2} + \frac{k}{m_1}\right)(x_2 - x_1 - l_0). \quad (2.20)$$

Если ввести теперь новую переменную $\xi = (x_2 - x_1 - l_0)$, то уравнение сводится к хорошо знакомому виду уравнения гармонического осциллятора. Роль коэффициента ω_0^2 выполняет множитель $\left(\frac{k}{m_2} + \frac{k}{m_1}\right)$. Собственная частота, таким образом, может быть записана в виде:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad (2.21)$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ называется *приведённой массой*

Глава I. Свободные колебания

молекулы. Поскольку $(x_2 - x_1)$ – это длина пружины в процессе колебаний, очевидно, смысл введенной нами переменной ξ – деформация пружины (*равная относительно смещению атомов-шариков*) при колебаниях. Она-то и меняется по гармоническому закону с частотой ω_0 . Отметим, что центр масс системы в указанных условиях покоится.

Деформации пружины для реальной химической связи соответствует изменение длины валентной связи. Поэтому соответствующие колебания называют «валентными», а частоту ω_0 – частотой валентных колебаний 2-х атомной молекулы.

Примечание 1. Изотопные сдвиги в колебательных спектрах

Как мы видим, собственная частота внутримолекулярных колебаний ω_0 определяется константой квазиупругого взаимодействия атомов

($k = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}}$), а также приведённой массой молекулы.

Обсудим пример влияния состава химических групп на возможность их идентификации в так называемых колебательных спектрах. Если атом водорода в гидроксильной группе заменить на его тяжёлый изотоп дейтерий (D), то это, как мы теперь можем предполагать, изменит и частоту собственных колебаний. Отношение соответствующих частот

равно:

$$\frac{\omega_0^{OH}}{\omega_0^{OD}} = \sqrt{\frac{\mu_{OD}}{\mu_{OH}}} = \sqrt{\frac{m_D(m_O + m_H)}{m_H(m_O + m_D)}} \approx 1,37. \quad (2.22)$$

То есть частота собственных *внутримолекулярных* колебаний "обычных" гидроксильных групп примерно на 37% выше, чем "тяжелых". Это хорошо подтверждается экспериментально соответствующим положением максимумов полос поглощения веществ в инфракрасном диапазоне (*молекулярная ИК спектроскопия*). Методика изотопного дейтериевого обмена широко используется для идентификации колебательных спектров водородсодержащих фрагментов в исследуемом веществе.

Примечание 2. Свободные и связанные гидроксилы

Изменения характерной ("собственной") частоты колебаний происходит и в том случае, если один из атомов теряет подвижность – оказывается сцеплен с другим очень тяжёлым или с поверхностью твёрдого тела. Оценим относительное изменение такой частоты для случая свободной и "связанной" гидроксильной группы. В последнем случае мы имеем дело фактически с колебанием одного лёгкого атома водорода.

Полагая, что для связанного гидроксила $m_2 \gg m_1$, $m_1 = m_H$, получаем:

$$\frac{\omega_0^{\text{своб}}}{\omega_0^{\text{связ}}} = \sqrt{\frac{(m_O + m_H)}{m_O}} \approx 1,031. \quad (2.23)$$

Мы видим, что это отличие на порядок меньше. Однако с помощью современной аппаратуры легко регистрируются спектральные сдвиги характерных максимумов (ИК и КРС) на сотые и даже тысячные доли процента. А разница в 3,1% следующая из полученной нами оценки (2.23), представляет собой громадный эффект, который уже давно экспериментально обнаружен и наблюдается в соответствующих случаях.

2.3.2. Многоатомные молекулы. Колебательные степени свободы

Число нормальных колебаний молекулы равно числу её колебательных степеней свободы. Прежде всего, найдём это число, исходя из общих представлений. Положение каждого атома (материальной точки) определено 3-мя её пространственными координатами x , y и z . Если молекула содержит N атомов, то число таких координат $3N$. Поступательное движение, как мы знаем, описывается 3-мя координатами центра масс системы, а изменение положения в результате поворота в общем случае тремя угловыми координатами. Все эти числа надо исключить при подсчёте характеристик колебательного процесса в

молекуле. Следует учесть, однако, что поворот линейной молекулы относительно её собственной оси не приводит к физически различимым изменениям её состояния в контексте обсуждаемых вопросов. Поэтому для расчёта искомого числа колебательных степеней свободы многоатомной молекулы мы приходим к простым формулам:

$3N - 6$ для нелинейных и

$3N - 5$ для линейных молекул.

Проверим теперь на примере простейшего случая двухатомной молекулы утверждение, сформулированное в начале этого пункта. Очевидно, это случай линейной молекулы, поэтому $3N - 5 = 3 \times 2 - 5 = 1$. Возможно только одно нормальное колебание и, соответственно, одна характерная для него частота. Посмотрим, как обстоит дело для несколько более сложных молекул.

Пример 3. Молекула воды H₂O

Эта молекула, как известно, не является линейной. Направление химических связей между атомами кислорода и водорода составляет угол 108 градусов. $3N - 6 = 3 \times 3 - 6 = 3$, и для такой молекулы характерны два *валентных* и одно *деформационное* нормальное колебание.

Глава I. Свободные колебания

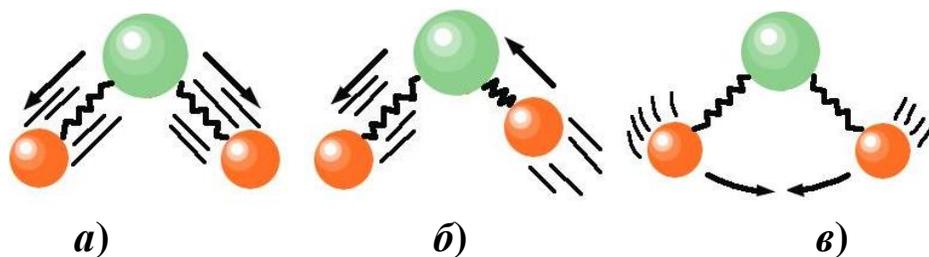


Рис. 2.7. Валентные и деформационные моды молекул H_2O .

Для валентных колебаний – см. рис. 2.7,*а* и *б*, в свою очередь, можно выделить *симметричную* (*а*) и *антисимметричную* (*б*) моду, соответственно. В первом случае атомы водорода одновременно движутся либо в сторону атома кислорода либо от него. Эти колебания являются, как легко заметить, противофазными. Напротив, при антисимметричных нормальных колебаниях один атом водорода приближается, а другой удаляется от кислорода (рис. 2.7,*б*). Такие движения происходят синфазно. Валентные колебания $O - H$ проявляют себя в спектрах колебательной молекулярной спектроскопии (ИКС и КРС), спектральной полосой с характерным максимумом в области частот – 3450 см^{-1} *).

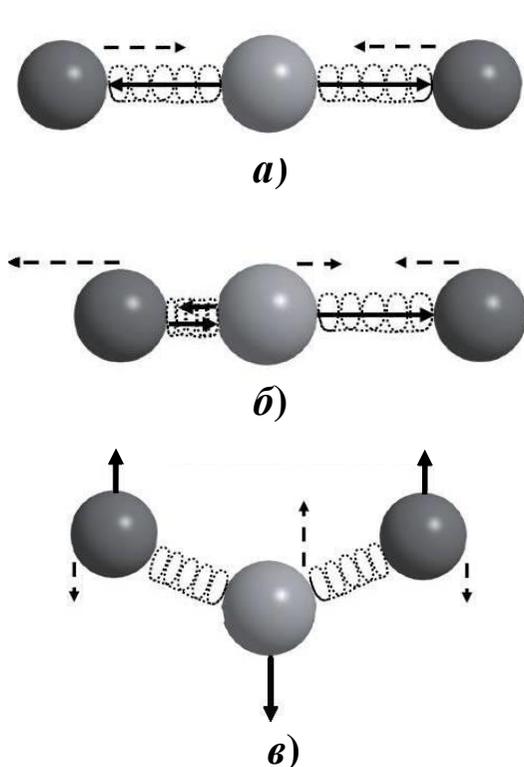
При деформационных нормальных колебаниях меняется угол между направлениями химических связей – см. рис. 2.7,*в*. В силу понятной аналогии в колебательной молекулярной спектроскопии такие

*) Такая единица измерений оказалась удобной в ИК и КР спектроскопии, соответствуя значениям $1/\lambda$, если длину волны измерять в сантиметрах.

колебания принято также называть «ножничными». Область частот соответствующей спектральной полосы – 1680 см^{-1} . Её наличие в спектрах ИКС и КРС позволяет индицировать присутствие молекулярной воды на фоне самостоятельных гидроксильных групп.

Пример 4. Молекула CO_2

Эта молекула линейная. Поэтому $3N - 5 = 3 \times 3 - 5 = 4$, и для такой молекулы характерны два валентных и два деформационных нормальных колебания.



Валентные колебания, как и в случае молекулы воды, происходят либо противофазно, либо в одной фазе – см. рис. 2.8. Соответственно либо симметричны (а), либо антисимметричны (б). На семинарских занятиях при обсуждении колебаний систем связанных осцилляторов мы рассчитаем отношение частот этих мод.

Рис. 2.8. Колебания молекул CO_2 .

Глава I. Свободные колебания

Деформационные колебания дают физически эквивалентные движения в двух перпендикулярных к оси направлениях, поэтому являются «вырожденными» и характеризуются одной и той же частотой.

§ 3. Свободные затухающие колебания

3.1. Дифференциальное уравнение осциллятора с затуханием

На уже знакомых примерах простейших колебательных систем – рис. 3.1 и 3.2 – посмотрим,

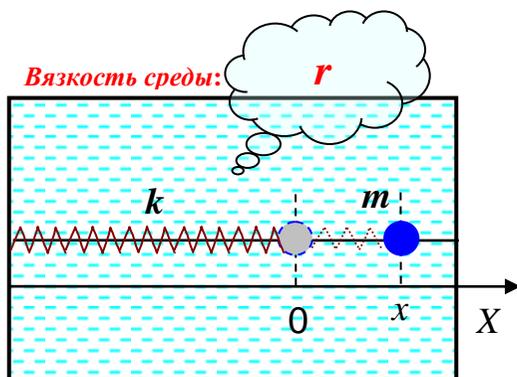


Рис. 3.1. Пружинный маятник в вязкой среде

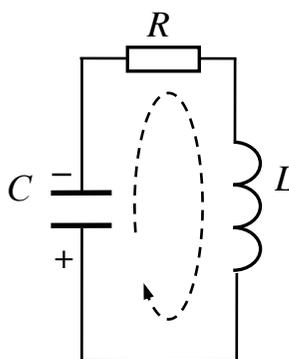


Рис. 3.2. Контур с затуханием

как можно учесть наличие в реальных условиях потерь колебательной энергии. В уравнении для пружинного маятника должна появиться сила трения. Будем предполагать пока, что это сила вязкого трения, пропорциональная скорости движения тела:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \quad (3.1)$$

В правой части уравнения движения появилось слагаемое, соответствующее проекции этой силы на координатную ось^{*)}.

Наличие омического сопротивления в контуре добавляет падение потенциала на нём в записи 2-го правила Кирхгофа:

$$RI + \frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.2)$$

После знакомых уже замен $I = \frac{dq}{dt} \equiv \dot{q}$ и

$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \equiv \ddot{q}$, получаем уравнение:

$$R\dot{q} + \frac{1}{C}q = -L\ddot{q}$$

Оба уравнения после очевидных простейших преобразований (деления на m или L) и переноса всех слагаемых в левую часть приводят нас к уравнению вида:

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0. \quad (3.3)$$

3.2. Малое затухание. Характеристики осциллятора с малым затуханием

Затухание в системе считается малым, если выполнено условие $\beta < \omega_0$. Колебания в этом случае напоминают гармоническое, но его амплитуда

^{*)} Заметим, что в данном случае при $x_0 = 0$ переменная ξ тождественна x .

Глава I. Свободные колебания

уменьшается с течением времени тем быстрее, чем больше коэффициент затухания. Аналитически вид решения уравнения (3.3) выглядит так:

$$\xi(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_c t + \varphi_0). \quad (3.4)$$

График этой функции представлен на рис. 3.3. Частота таких колебаний ω_c несколько меньше

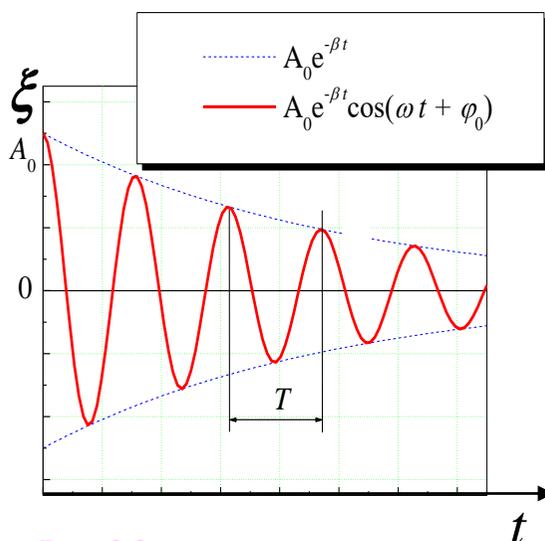


Рис. 3.3. Малое затухание.

частоты ω_0 и равна:

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (3.5)$$

Убывание амплитуды, как мы видим, происходит по экспоненциальному закону и тем быстрее, чем больше коэффициент затухания β . В разных случаях используют целый набор характеристик темпа затухания колебаний в системе:

1. *Время релаксации амплитуды* τ_A – время уменьшения амплитуды колебаний в “ e ” раз:

$$\frac{A_0}{A_0 e^{-\beta \tau_A}} = e, \quad \text{откуда} \quad \tau_A = 1/\beta. \quad (3.6)$$

2. *Количество колебаний* N_e , за которое амплитуда уменьшится в “ e ” раз :

$$N_e = \frac{\tau_A}{T} = \frac{1}{\beta T}. \quad (3.7)$$

Здесь $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$ – период затухающих колебаний.

3. *Декремент затухания* – величина, равная отношению амплитуд двух последовательных колебаний:

$$D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}. \quad (3.8)$$

4. *Логарифмический декремент затухания* – логарифм декремента затухания (как видим, величина обратная числу N_e):

$$\gamma = \ln D = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{1}{N_e}. \quad (3.9)$$

3.3. Добротность колебательной системы. Энергия затухающих колебаний

Часто используемой характеристикой колебательных систем является так называемая *добротность* Q . Для её определения можно опираться как на свойства осциллятора при его свободных затухающих колебаниях,

Глава I. Свободные колебания

так и при вынужденных незатухающих. В последнем случае эта величина связана с резонансными свойствами системы и, как нам представляется, именно они больше подходят для использования при формулировке определения. Пока же отметим связь с ней уже приведённых характеристик:

$$Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\gamma} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega_c}{2\beta}. \quad (3.10)$$

Надеемся, что последняя цепочка равенств не вызывает трудностей для понимания. Отметим только, что при *очень малом затухании* ($\beta \ll \omega_0$), которое нередко реализуется в практически используемых колебательных системах в последнем случае можно использовать и приближенное

соотношение $Q \cong \frac{\omega_0}{2\beta}$.

Попробуем выявить физический смысл добротности в контексте обсуждения свободных колебаний при затухании. Обсудим в этой связи поведение энергии осциллятора с затуханием.

Энергия, запасённая осциллятором, пропорциональна квадрату амплитуда колебаний (для механических колебаний) или квадрату максимального заряда конденсатора (для электрических колебаний) – см.

соотношения (1.7) и (1.8). Следовательно, в любой момент времени

$$W(t) = W_0 \cdot e^{-2\beta t} = W_0 \cdot e^{-t/\tau_w}, \quad (3.11)$$

где W_0 – начальный запас энергии осциллятора, $\tau_w = 1/2\beta$ – время релаксации энергии (оно в два раза меньше времени релаксации амплитуды). Учитывая, что потеря энергии за период

$$\Delta W_T(t) = W(t) - W(t+T) = W(t)(1 - e^{-2\beta T}),$$

получаем

$$\frac{W(t)}{\Delta W_T(t, T)} = \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}}.$$

В условиях очень малого затухания $e^{-2\beta T} \approx 1 - 2\beta T$ и соотношение (1.37) преобразуется к виду

$$\frac{W(t)}{\Delta W_T(t, T)} = \frac{1}{2\beta T} = \frac{N_e}{2} = \frac{1}{2\gamma} = \frac{Q}{2\pi}.$$

Отсюда следует ещё один способ определять добротность (подчеркнём, что это справедливо только при очень малом затухании):

$$Q \cong 2\pi \frac{W(t)}{\Delta W(t, T)}.$$

 (3.12)

► *Добротность пропорциональна отношению энергии, запасённой осциллятором, к энергии, теряемой за период при свободных колебаниях*

Заметим, что, поскольку время релаксации энергии $\tau_w = 1/2\beta$, добротность можно связать и с этой величиной:

$$Q = \frac{\omega_c}{2\beta} \Rightarrow Q = \omega_c \cdot \tau_W \approx \omega_0 \cdot \tau_W. \quad (3.13)$$

Последнее равенство также правомерно только в условиях малого затухания.

3.4. Осциллятор с большим затуханием. Апериодический режим

Обсудим теперь некоторые закономерности поведения осциллятора с большим затуханием ($\beta > \omega_0$). В этом случае решение дифференциального уравнения (3.3) имеет вид:

$$\xi(t) = e^{-\beta t} (Ae^{\beta_1 t} + Be^{-\beta_1 t}) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + B \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}. \quad (3.14)$$

Здесь $\beta_1 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, $\tau_1 = \frac{1}{\beta - \beta_1}$, $\tau_2 = \frac{1}{\beta + \beta_1}$.

Два параметра – A и B определяются из начальных условий (начальная координата и начальная скорость должны быть заданы). В частности, если в начальный момент времени смещение равно нулю (например, маятник выводится из равновесия толчком), то $\xi(0) = A + B = 0$ и $A = -B$. Соответствующая зависимость смещения от времени показана на рис. 3.4(а). Если начальное отклонение от положения равновесия не равно нулю, то $A \neq -B$; Этот случай зависимости смещения от времени при движении тела показан на рис. 3.4 (б).

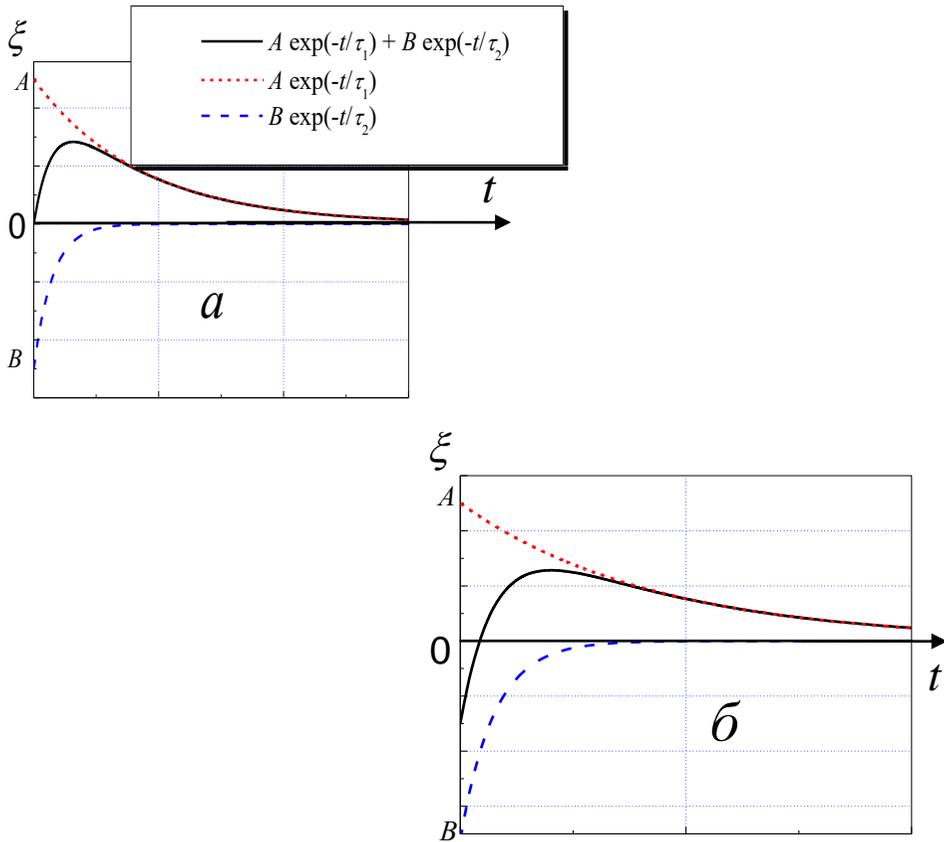


Рис. 3.4. Поведение осциллятора с большим затуханием при разных способах возбуждения.

Сравнивая рисунки 3.3 и 3.4, легко понять, почему режим с большим затуханием называют «**апериодическим**». Существенно, что время возвращения системы к равновесию определяется в апериодическом режиме экспонентой с наибольшей постоянной времени $\tau_1 = \frac{1}{\beta - \beta_1}$. При очень сильном

Глава I. Свободные колебания

затухании ($\beta \gg \omega_0$) эта постоянная времени может быть очень большой ($\beta \cong \beta_1, \tau_1 \rightarrow \infty$).

Очевидно, режим с большим затуханием нецелесообразно использовать при работе стрелочных приборов, как, впрочем, и режим с малым затуханием. С этой точки зрения интересен так называемый «критический» режим осциллятора, когда выполняется условие $\beta = \omega_0$, т.е. $\beta_1 = 0$.

Критический режим широко используется в работе различных приборов, поскольку в этом режиме возвращение к положению равновесия происходит наиболее быстро.

В критическом режиме $\tau_1 = \tau_2$, и решение (3.14) не может быть общим решением дифференциального уравнения второго порядка, поскольку фактически в (3.14) останется только один параметр – множитель перед экспонентой. Решением уравнения (3.14) при $\beta = \omega_0$ является функция

$$\xi(t) = (A + B \cdot t)e^{-\beta t}. \quad (3.15)$$

Параметр A в этом случае имеет смысл начального смещения $\xi(0)$, начальная скорость равна $\dot{\xi}(0) = B - \beta \cdot A$. Если начальное отклонение от положения равновесия равно нулю ($A = 0$), то параметр B определяет величину начальной скорости осциллятора. В рассматриваемом случае зависимость смещения тела от времени

получается умножением спадающей экспоненты на функцию $B \cdot t$ – см. рис. 3.5.

Дифференцируя по времени $\xi(t) = V_0 \cdot t \cdot e^{-\beta t}$ и приравнявая производную нулю, находим, что максимальное отклонение от положения равновесия достигается в момент времени $t_{max} = \frac{1}{\beta}$. В этот момент

$$\xi_{max} = \xi(1/\beta) = \frac{B}{\beta e}.$$

Таким образом, максимальное отклонение от положения равновесия в рассматриваемом случае оказывается пропорциональным начальной скорости $\xi_{max} \sim B = \dot{\xi}(0)$. Это фундаментальное свойство осциллятора в критическом режиме используется в так называемых «баллистических» приборах (баллистических маятниках, баллистических гальванометрах). В этих

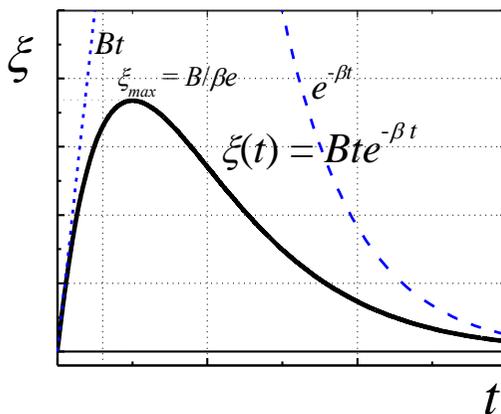


Рис. 3.5. Осциллятор в критическом режиме.

Глава I. Свободные колебания

приборах конструктивными “ухищрениями” добиваются того, чтобы период колебаний (маятника, либо рамки гальванометра) был достаточно большим (существенно превышал время того воздействия Δt , которое предполагается исследовать – например, время соударения маятника с каким-либо телом или время протекания импульса тока через рамку гальванометра). Тогда импульс, который получает баллистический маятник за время Δt , можно считать пропорциональным начальной скорости маятника. Следовательно, максимальное отклонение маятника от положения равновесия с точностью до градуировочного множителя будет указывать величину сообщенного маятнику импульса (“количества движения”).

Глава II. Вынужденные колебания

§ 1. Вынужденные механические колебания при гармоническом внешнем воздействии

1.1. Дифференциальное уравнение для вынужденных колебаний

Свободные колебания в реальных системах всегда являются затухающими – наличие трения или электрического сопротивления ведёт к потерям колебательной энергии. Постоянство амплитуды можно обеспечить лишь, добавляя энергию извне. Источником этой энергии может быть, например, внешняя периодическая сила или ЭДС. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда изменяются со временем они по простому гармоническому закону:

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t \quad \text{или} \quad U(t) = U_0 \cos \Omega t \quad ^*) \quad (1.1)$$

Это связано с тем, что в случае, когда на осциллятор действует любая иная периодическая сила, зависимости $F(t)$ или $U(t)$ могут быть представлены в виде разложения по гармоническим компонентам. Поэтому, поняв поведение системы при воздействии одной из них, мы получаем “ключ” к рассмотрению достаточно общей задачи.

*) Вместо привычного обозначения ЭДС в данном контексте чаще приводят обозначение напряжения “ U ”.

Глава II. Вынужденные колебания

При составлении уравнения, описывающего вынужденные колебания, будем опираться на уже хорошо знакомые примеры осцилляторов – пружинный маятник и колебательный контур. В первом случае добавляется действующая на тело переменная сила, во втором в контур включается генератор переменной ЭДС – см. рис. 1.1 и 1.2.

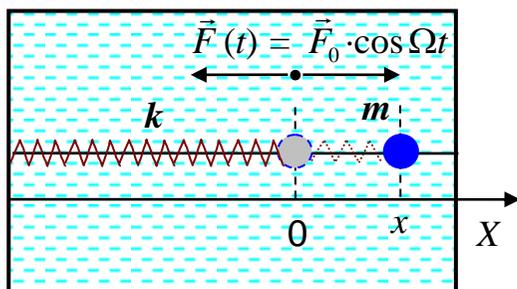


Рис. 1.1. Пружинный маятник с внешним воздействием.

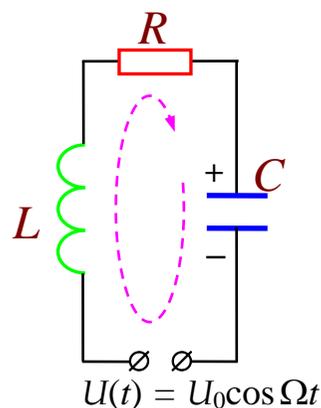


Рис. 1.2. Контур с генератором ЭДС $U(t)$.

Как всегда, запишем для механической системы 2-й закон Ньютона, а для электрической 2-е правило Кирхгофа:

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx + F_0 \cos \Omega t . \quad (1.2)$$

$$-L\ddot{q} + U_0 \cos \Omega t = \frac{1}{C}q + R\dot{q} . \quad (1.3)$$

После привычных уже простейших математических операций и замен обозначений оба равенства легко привести к единому виду:

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = f_0 \cos \Omega t, \quad (1.4)$$

где $\beta = r/2m$ или R/L , $\omega_0^2 = k/m$ или $1/LC$, $f_0 = F_0/m$ или U_0/L .

Вот теперь, продемонстрировав общность подхода, займёмся пока механическим случаем. А электрический оставим на потом, выделив в отдельный параграф.

1.2. Вид решения дифференциального уравнения для вынужденных колебаний

С математической точки зрения уравнение (1.4) по сравнению с уравнением (3.3) предыдущего параграфа перестало быть однородным – в правой части вместо нуля появилась функция времени. И математика говорит нам, что общее решение уравнения такого вида состоит из его частного решения и общего решения однородного. Но ведь и «физика» нам подсказывает, что как только на систему начнёт действовать посторонняя сила, система будет выведена из положения равновесия. В ней неминуемо возникнут собственные колебания с частотой ω_c . Описание таких колебаний нам хорошо знакомо – они будут затухающими^{*)}:

$$\xi(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_c t + \varphi_0).$$

^{*)} Интерес представляют чаще всего системы с небольшим затуханием.

Глава II. Вынужденные колебания

Кроме того, система будет вынуждена “подчиняться” внешней силе, действующей в общем случае с иной частотой Ω . Поэтому на начальном этапе колебания системы будут сложными, состоящими из двух колебательных процессов с разными частотами. Однако собственные затухающие колебания, на то и затухающие, что по истечению времени существенно превышающего время релаксации $t \gg \tau_A = 1/\beta$ они практически исчезнут.

После этого осциллятор будет совершать только вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы Ω . Этот процесс мы будем называть режимом *установившихся вынужденных колебаний (у.в.к.)*. Он описывается как раз частным решением дифференциального уравнения (1.4):

$$\xi_{у.в.к.}(t) = \mathcal{A} \cdot \cos(\Omega t - \alpha). \quad (1.5)$$

Для обозначения амплитуды именно установившихся вынужденных колебаний мы здесь использовали особое написание буквы ” \mathcal{A} “, чтобы отличать её от амплитуды колебаний собственных.

❖ **Важные замечания**

1) В дальнейшем только установившиеся вынужденные колебания мы и будем рассматривать.

2) Они происходят на частоте Ω , которая определяется внешним воздействием $F(t)$ и, вообще

говоря, никак не связана с собственной частотой осциллятора ω_c .

3) Величина α никак не связана с начальной стадией процесса. Это разница фаз между функциями $F(t)$ и $\xi(t)$ – сдвиг фаз между ними.

4) Нам необходимо научиться находить значения \mathcal{A} и α . В отличие от колебаний свободных они определяются вовсе не начальными условиями процесса. Чем именно, нам и предстоит сейчас выяснить.

1.3. Амплитуда и фаза установившихся вынужденных колебаний

Итак, если система совершает установившиеся вынужденные колебания, то в дифференциальное уравнение, описывающее этот процесс, входят только гармонические функции $\xi(t)$, $\dot{\xi}(t)$, $\ddot{\xi}(t)$ и $F(t)$. Чтобы убедиться в этом, нам достаточно продифференцировать $\xi(t)$:

$$\dot{\xi}(t) = -\mathcal{A}\cdot\Omega\cdot\sin(\Omega t - \alpha) = \mathcal{A}\cdot\Omega\cdot\cos(\Omega t - \alpha + \pi/2), \quad (1.6)$$

$$\ddot{\xi}(t) = -\mathcal{A}\cdot\Omega^2\cdot\cos(\Omega t - \alpha) = \mathcal{A}\cdot\Omega^2\cdot\cos(\Omega t - \alpha + \pi). \quad (1.7)$$

Чтобы удовлетворять дифференциальному уравнению (1.4), сумма гармонических компонент в левой части уравнения должна совпасть с функцией в правой части – $F(t)$. Для сложения гармонических

Глава II. Вынужденные колебания

функций и поиска амплитуды \mathcal{A} и сдвига фаз α у.в.к. удобно использовать метод векторных диаграмм.

Заменим гармонические функции (1.5) – (1.7) векторами, вращающимися против часовой стрелки с угловой скоростью Ω . Длина каждого вектора равна амплитуде соответствующего колебания, а полярный угол – его фазе. На рисунке 1.3 представлены все необходимые нам векторы-колебания $\omega_0^2 \xi(t)$, $2\beta \dot{\xi}(t)$ и $\ddot{\xi}(t)$. Поскольку фазы всех функций меняются с течением времени, каждый вектор-колебание и вся «картинка» вращается против часовой стрелки с угловой скоростью Ω . Это означает, что взаимное расположение «стрелок» на ней не меняется! Мы можем зафиксировать диаграмму для момента, когда

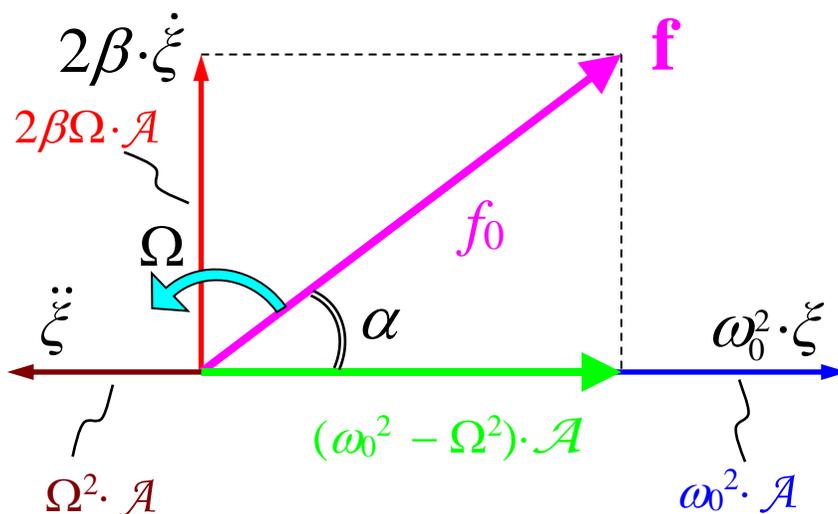


Рис. 1.3. Векторная диаграмма сложения колебаний.

вектор $(\omega_0^2 \cdot \xi)$, соответствующий $\omega_0^2 \cdot \xi(t)$ направлен, например, по горизонтали вправо. Функция $2\beta \dot{\xi}(t)$ опережает $\xi(t)$ по фазе на $\pi/2$, а функция $\ddot{\xi}(t)$ на π , как следует из равенств (1.6) и (1.7). Соответствующие векторы-колебания смотрят вверх ($2\beta \cdot \dot{\xi}$) и влево ($\ddot{\xi}$).

Сложим все эти векторы, соответствующие гармоническим функциям в левой части уравнения (1.4). Результат сложения трёх векторов, соответствующих трём слагаемым в левой части уравнения (1.4), должен быть равным вектору, соответствующему гармонической функции $f(t)$ в правой части. Длина этого вектора равна f_0 , а угол α – как раз и соответствует сдвигу по фазе между силой и смещением в уравнении (1.4). По теореме Пифагора нетрудно записать: $\mathcal{A}^2 \cdot [(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2] = f_0^2$. Найдём отсюда амплитуду установившихся вынужденных колебаний. Он равна:

$$\mathcal{A}(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}. \quad (1.8)$$

Мы здесь умышленно подчеркнули зависимость амплитуды у.в.к. от частоты внешнего воздействия Ω . Ведь ω_0 и β – константы, характеризующие свойства колебательной системы. Величина f_0 определяется амплитудой внешнего воздействия, которую тоже можно считать постоянной.

Глава II. Вынужденные колебания

Из нашей векторной диаграммы на рис. 1.3 видно, что фаза смещения при механических вынужденных колебаниях всегда «запаздывает» – вектор-колебание повернут по часовой стрелке относительно вектора \mathbf{f} . Для сдвига фаз α удобно выразить его тангенс:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (1.9)$$

Аналогично амплитуде, фазовое запаздывание α при данных фиксированных параметрах осциллятора ω_0 и β , а также f_0 зависит от частоты внешнего воздействия Ω . Таким образом, мы получили аналитический вид амплитудно-частотной $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Omega)$ и фазо-частотной $\alpha = \alpha(\Omega)$ зависимостей для установившихся вынужденных колебаний. Такие зависимости принято называть также «резонансными». Почему и как они выглядят в графическом представлении, нам сейчас и предстоит выяснить.

Прежде чем перейти к этому вопросу, введём дополнительно и пока сугубо формально понятия «амплитуда поглощения» и «амплитуда дисперсии» следующим образом:

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A} \cdot \sin \alpha, \quad \mathcal{A}_d = \mathcal{A} \cdot \cos \alpha. \quad (1.10)$$

Смысл этих терминов станет понятным позднее. Но удобно, анализируя частотные зависимости, говорить сразу и про эти величины тоже.

1.4. Резонансные кривые

Прежде чем перейти к заявленному выше графическому представлению зависимостей $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Omega)$ и $\alpha = \alpha(\Omega)$ рассмотрим сначала области низких ($\Omega \ll \omega_0$) и высоких ($\Omega \gg \omega_0$) частот вынуждающего воздействия.

1) Низкие частоты. При $\Omega \ll \omega_0$ (или “ $\Omega \rightarrow 0$ ”), как легко видеть из равенств (1.8) – (1.9):

$$\mathcal{A}_{\Omega \rightarrow 0} \approx \frac{f_0}{\omega_0^2} \quad (\text{или } \mathcal{A}_{\Omega \rightarrow 0} \approx \frac{F_0}{k} \text{ – статическое смещение}). \quad (1.11)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (\text{но при этом } \alpha > 0!). \quad (1.12)$$

Отметим здесь же, что при $\alpha \approx 0$, $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$, а $\cos \alpha \approx 1$.

Поэтому

$$\mathcal{A}_n \approx \frac{2\beta \cdot f_0 \cdot \Omega}{\omega_0^4} \rightarrow 0, \quad \mathcal{A}_d \approx \mathcal{A}. \quad (1.13)$$

Таким образом, на низких частотах смещение успевает следовать за силой без отставания по фазе; механический осциллятор ведёт себя практически так же, как под действием постоянной силы: в частности, при действии максимальной силы F_0 пружина растягивается на максимальную величину

$$\mathcal{A}_{\Omega \rightarrow 0} = \frac{F_0 / m}{k / m} = \frac{F_0}{k}.$$

2) Высокие частоты. При $\Omega \gg \omega_0$

Глава II. Вынужденные колебания

$$\mathcal{A}_{\Omega \rightarrow \infty} \approx \frac{f_0}{\Omega^2} \rightarrow 0. \quad (1.14)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \approx -\frac{2\beta}{\Omega} \rightarrow -0 \text{ и } \alpha \rightarrow \pi. \quad (1.15)$$

Амплитуды поглощения и дисперсии также асимптотически стремятся к нулю ($\mathcal{A}_n \approx 2\beta f_0/\Omega^3$, $\mathcal{A}_d \approx -f_0/\Omega^2 \rightarrow 0$).

При высокочастотном внешнем воздействии осциллятор вообще не успевает следовать за внешней силой, отсюда – малая амплитуда и отставание по фазе на π .

3) А теперь самое важное. Зависимость $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Omega)$ – это зависимость немонотонная, это зависимость с экстремумом! Как раз в этом и есть суть резонанса.

➡ **“Опр.”** Резонанс – явление, которое состоит в том, что амплитуда вынужденных колебаний оказывается максимальной при частоте внешнего воздействия, близкой к собственной частоте колебательной системы

Найдём условия, при которых достигается максимальная амплитуда вынужденных колебаний. (т.е. наблюдается «резонанс смещения»). Дифференцируя подкоренное выражение в (1.8) и приравнивая производную нулю, получаем частоту, на которой наблюдается резонанс:

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega_c^2 - \beta^2}. \quad (1.16)$$

Вот теперь мы можем перейти к графическому представлению резонансных зависимостей для амплитуды и фазового сдвига. Они представлены на рис. 1.4 и 1.5 соответственно.

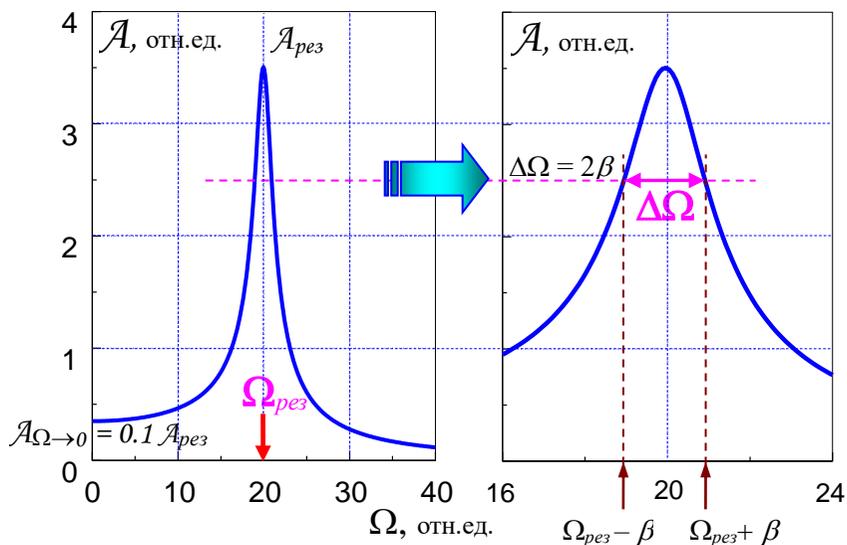


Рис. 1.4. Амплитудно-частотная резонансная зависимость.

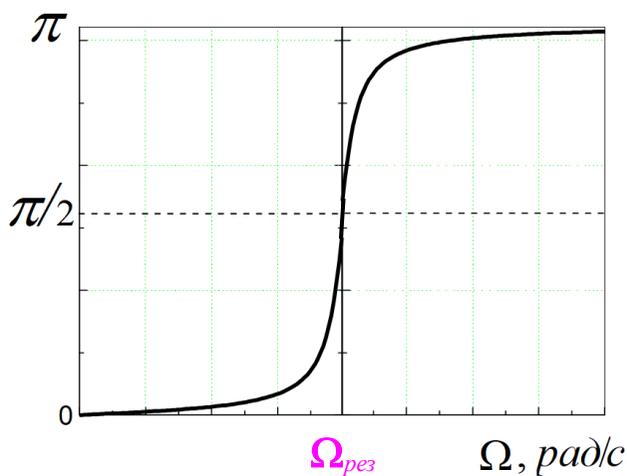


Рис. 1.5. Фазо-частотная резонансная зависимость.

Глава II. Вынужденные колебания

Подставив найденное значение резонансной частоты в равенства (1.8) и (1.9), получим амплитуду и тангенс угла сдвига фаз между смещением и силой при резонансе:

$$\mathcal{A}_p = \frac{f_0}{2\beta\omega_c}; \quad (1.17)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{рез}} = \frac{\Omega_{\text{рез}}}{\beta}. \quad (1.18)$$

При очень малом затухании ($\beta \ll \omega_0$) справедливы следующие полезные приближения:

$$\mathcal{A}_p \cong \frac{f_0}{2\beta\omega_0}; \quad (1.19)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{рез}} = \frac{\omega_0}{\beta}; \quad \alpha_{\text{рез}} \approx \frac{\pi}{2}. \quad (1.20)$$

Используя полученные нами результаты (1.19) и (1.11), можно показать, что *отношение амплитуды колебаний при резонансе к амплитуде на низкой частоте с высокой степенью точности равно добротности* – и это ещё один способ расчёта добротности (!) :

$$\frac{\mathcal{A}_p}{\mathcal{A}_{\Omega \rightarrow 0}} = \frac{\omega_0^2}{2\beta\omega_c} \cong \frac{\omega_c}{2\beta} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{\mathcal{A}_p}{\mathcal{A}_{\Omega \rightarrow 0}}}. \quad (1.21)$$

Добавим – полученное значение фазового сдвига $\alpha_{\text{рез}} \approx \pi/2$ означает, что при резонансе амплитуда поглощения приблизительно равна амплитуде смещения $\mathcal{A}_n^{\text{рез}} \approx \mathcal{A}$, а амплитуда дисперсии близка к нулю $\mathcal{A}_d^{\text{рез}} \approx 0$.

Для иллюстрации подведём некоторые итоги нашего анализа в графической форме – см. рис. 1.6.

*** Примечание**

В дополнение поясним также происхождение термина «*амплитуда дисперсии*». Видно, что график на рис. 1.6,в напоминает известную из оптики дисперсионную кривую. И это, конечно же, не случайно. Глядя на векторную диаграмму 1.3, заметим, что величина $\mathcal{A} \sin \alpha$ – это проекция вектора смещения ξ на направление вынуждающей силы. То есть она соответствует амплитуде колебаний, *совпадающих по фазе с силовым воздействием*. В частности, при прохождении электромагнитных волн через диэлектрическую среду в её атомах происходят периодические смещения электронных оболочек под действием электрического поля волны. Амплитуда дисперсии в этом

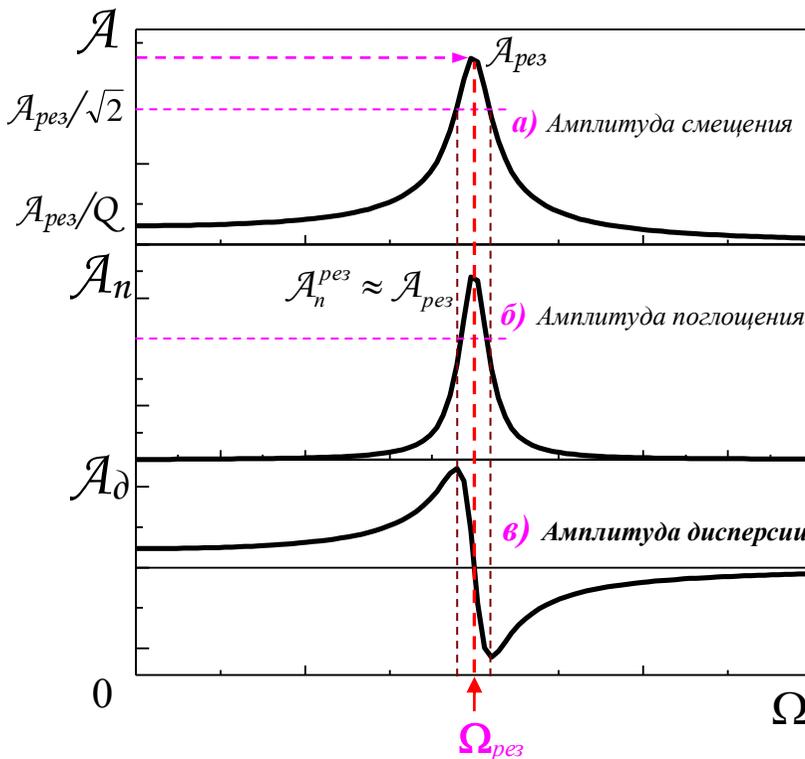


Рис. 1.6. Резонансные зависимости $\mathcal{A}(\Omega)$, $\mathcal{A}_n(\Omega)$ и $\mathcal{A}_d(\Omega)$.

Глава II. Вынужденные колебания

случае – это амплитуда колебаний электронных оболочек, происходящих в фазе с электрическим полем волны. Но ведь такое смещение электронных оболочек ответственно за поляризацию диэлектрика, которая определяет величину его диэлектрической проницаемости ϵ , следовательно, и скорости распространения электромагнитных волн. Поэтому зависимость амплитуды дисперсии от частоты (см. рис. 1.6,в) отражает характер *дисперсии волн* – т.е. *зависимость скорости их распространения от длины волны*.

1.5. “Резонанс скорости” ($\dot{\xi} = \dot{\xi}(\Omega)$)

Полезно обсудить также «резонанс скорости» – т.е. достижение максимума в зависимости $\dot{\xi} = \dot{\xi}(\Omega)$. Учитывая, что амплитуда скорости, в соответствии с (1.6), равна $\mathcal{A}_v = \Omega \cdot \mathcal{A}$, получаем:

$$\mathcal{A}_v(\Omega) = \frac{f_0 \cdot \Omega}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}. \quad (1.22)$$

Для анализа этой зависимости от частоты удобно числитель и знаменатель поделить на Ω :

$$\mathcal{A}_v(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 / \Omega^2 + 4\beta^2}}. \quad (1.22,a)$$

Теперь мы видим, что второе слагаемое под корнем в знаменателе положительно и от частоты не зависит. Первое же минимально при совпадении частоты вынуждающего воздействия с собственной – оно равно нулю. Таким образом, резонанс скорости наблюдается при $\Omega_p^v = \omega_0$. Отметим и ещё одну

особенность данной резонансной зависимости – “она начинается” из нуля $\mathcal{A}_v(0) = 0$, в отличие от резонансной зависимости для смещения.

1.6. Мощность, затрачиваемая для поддержания вынужденных колебаний

Мы начали обсуждение вынужденных колебаний с того, что обеспечить постоянство амплитуды в реальных колебательной системах можно, лишь восполняя потери энергии на трение (механический случай) или выделение тепла (электрический). Пришло время обсудить вопрос о мощности, затрачиваемой источником этой энергии на поддержание вынужденных незатухающих колебаний.

Из раздела «Механика» нам известно, что мгновенная мощность развиваемая силой, равна её скалярному произведению на скорость тела

$$P(t) = F(t) \cdot \dot{\xi}(t). \quad (1.23)$$

Заметим, что в нашем одномерном случае $\dot{\xi}(t)$ соответствует как раз проекции скорости тела на направление силы и автоматически учитывает знак этой проекции в разные моменты времени. Подставляя в это равенство соответствующие функции для силы и $\dot{\xi}(t)$ (1.1 и 1.6), получим:

$$P(t) = F_0 \cos(\Omega t) \cdot \Omega \mathcal{A} \cdot \cos(\Omega t - \alpha + \pi/2) =$$

Глава II. Вынужденные колебания

$$= \frac{1}{2} F_0 \cdot \Omega \mathcal{A} \cdot [\cos(2\Omega t - \alpha + \pi/2) + \cos(\alpha - \pi/2)].^{*)} \quad (1.24)$$

Отсюда следует, что мгновенная мощность, затрачиваемая внешней силой на поддержание вынужденных колебаний, изменяется со временем с удвоенной частотой 2Ω . Очевидно, это быстропеременная функция времени. Она представлена нами на рис. 1.7. Интервалы времени

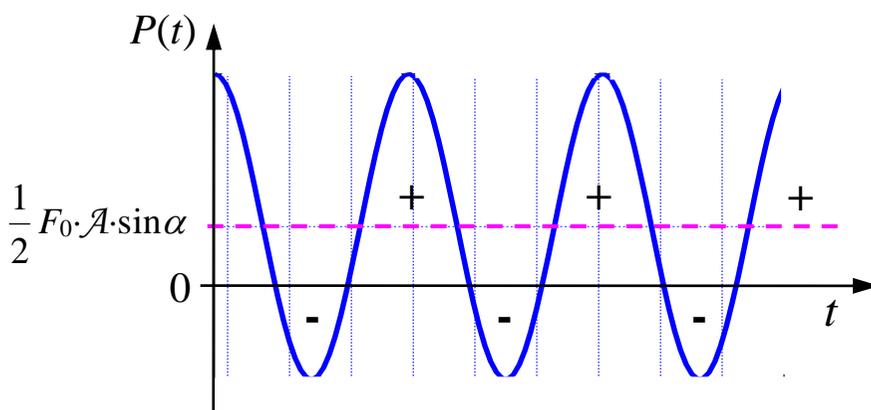


Рис. 1.7. Мгновенная мощность источника.

отмеченные символом «+» означают направление «передачи энергии» – от источника к системе, а символ «-» наоборот – от системы к источнику. Энергию, передаваемую «безвозвратно» определяет не мгновенная, а средняя за период мощность. Умножая её на нужный интервал времени, мы и получим полный «энергетический расход».

*) Здесь мы использовали известное тригонометрическое равенство для произведения косинусов.

Рассчитать среднюю мощность совсем не сложно. Формально этому соответствует операция интегрирования. Но мы хорошо знаем, что усреднение по времени любой гармонической функции всегда даст 0, ввиду её временной симметрии:

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{2} F_0 \cdot \Omega \cdot \mathcal{A} \cdot \cos(\alpha - \pi/2)$$

или

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} F_0 \cdot \Omega \cdot \mathcal{A} \cdot \sin \alpha \quad (1.25)$$

Вот здесь мы видим (множитель $\sin \alpha$), что средняя мощность $\langle P(t) \rangle$ существенно зависит от сдвига фаз между вынуждающим воздействием (силой) и смещением. Отсюда и происхождение термина “амплитуда поглощения” для величины $\mathcal{A}_n = \mathcal{A} \cdot \sin \alpha$, определяющей энергопередачу при вынужденных колебаниях:

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} F_0 \cdot \Omega \cdot \mathcal{A}_n. \quad (1.26)$$

1.7*. Лоренцева форма линии поглощения

Очень важной является зависимость средней мощности, затрачиваемой на поддержание вынужденных колебаний, от частоты внешнего воздействия Ω . На практике такая зависимость для электрических контуров определяет их резонансные свойства. Для атомных и молекулярных колебательных систем – определяет

Глава II. Вынужденные колебания

вид так называемых полос поглощения («форму линии»), связанных с возбуждением колебаний того или иного типа. Например, колебаний, возникающих под действием инфракрасного излучения (ИК-спектроскопия), электромагнитных волн сантиметрового диапазона (ЭПР-спектроскопия), или коротких радиоволн (ЯМР-спектроскопия).

Проанализируем частотную зависимость $I(\Omega)$ средней поглощаемой осциллятором мощности («спектр поглощения»), используя равенство (1.25), а также наши результаты для частотной зависимости амплитуды установившихся колебаний (1.8):

$$\mathcal{A}(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}.$$

и фазового сдвига α . Синус α при этом удобно найти из векторной диаграммы, представленной на рис. 1.3:

$$\sin\alpha = \frac{2\beta \cdot \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}. \quad (1.27)$$

Теперь нетрудно выделить интересующую нас функциональную зависимость $\langle P(t) \rangle$ от частоты Ω :

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} F_0 \cdot \Omega \cdot \mathcal{A} \cdot \sin\alpha \sim \frac{\beta^2 \Omega^2}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}. \quad (1.28)$$

Нетрудно проверить, что полученная функция быстро убывает при удалении от собственной частоты осциллятора ω_0 , т.е. вдали от резонанса. Вблизи же резонанса частоты Ω и ω_0 мало отличаются, и мы можем упростить вид первого слагаемого в знаменателе следующим нехитрым образом:

$$(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 = (\Omega - \omega_0)^2 \cdot (\Omega + \omega_0)^2 \approx (\Omega - \omega_0)^2 \cdot 4\Omega^2.$$

Тогда после деления числителя и знаменателя на $4\Omega^2$ получим, что характер зависимости средней поглощаемой

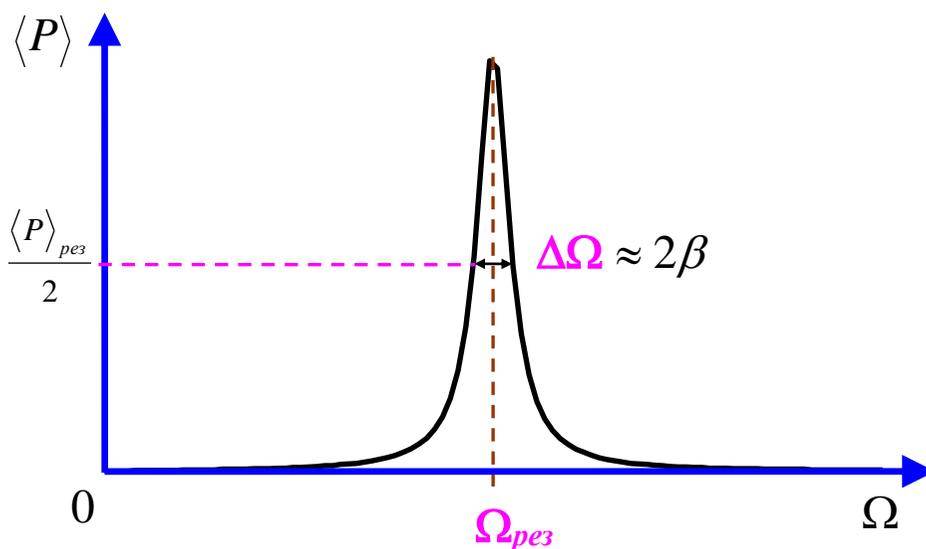


Рис. 1.8. Средняя мощность колебаний – функция Лоренца $\mathcal{R}(\Omega)$.

мощности от частоты может быть приближённо отображён функцией

$$\langle P(t) \rangle \sim \mathcal{R}(\Omega) = \frac{\beta^2}{(\Omega - \omega_0)^2 + \beta^2}. \quad (1.29)$$

В спектроскопии функция $\mathcal{R}(\Omega)$ называется “*лоренцевой функцией формы линии*”. Её график представлен на рис. 1.8.

Она обладает следующими свойствами:

- 1) $\mathcal{R}(\Omega) = 1$ при $\Omega = \omega_0$ (резонанс!);
- 2) $\mathcal{R}(\Omega) = 0,5$ при $|\Omega - \omega_0| = \beta$;
- 3) $\mathcal{R}(\Omega) = 0,1$ при $|\Omega - \omega_0| = 3\beta$.

Отсюда видно, что ширина линии, описываемой функцией $\mathcal{R}(\Omega)$ на половине её высоты^{*)} равна:

$$\Delta\Omega \approx 2\beta = 1/\tau_w.$$

^{*)} Иногда её жаргонно называют “полушириной”.

Глава II. Вынужденные колебания

Используя этот результат и учитывая известные нам равенства $Q = \omega_c \cdot \tau_W \approx \Omega_{рез} \cdot \tau_W$, можно дать ещё и такое *определение добротности*:

$$Q = \frac{\Omega_p}{\Delta\Omega}. \quad (1.30)$$

Надо сказать, что в разных разделах науки удобно пользоваться различными способами расчёта добротности колебательных систем, считая их “определениями”. Выбор способа зависит от контекста обсуждаемых проблем – относятся ли они к свойствам системы при вынужденных – «определение» (1.30) или при свободных затухающих колебаниях – определение (3.10) или (3.12) главы 1.

1.8. Вынужденные колебания в системе связанных осцилляторов

В заключительной части этого параграфа остановимся кратко на особенностях вынужденных колебаний в системе связанных осцилляторов. Ясно, что в системе с N степенями свободы при последовательном увеличении частоты внешнего воздействия будут поочередно наблюдаться резонансы для всех N нормальных мод. Соответствующие резонансные кривые будут тем шире, чем меньше добротность для данной моды колебаний (эти добротности могут быть разными!). На каждой резонансной частоте будут возбуждаться нормальные колебания только одного типа. С увеличением затухания резонансные кривые, соответствующие разным нормальным модам, начнут перекрываться. В этих условиях теряет смысл выделение отдельных нормальных мод, как независимых колебательных движений системы, не обменивающихся энергией; использование представлений о нормальных колебаниях становится некорректным.

§ 2. Вынужденные колебания в электрических цепях. Переменный ток

Вынужденные колебания в электрических цепях называют переменным током. Вынуждающим воздействием является на этот раз переменная ЭДС. Нас по-прежнему будет интересовать, прежде всего, простой гармонический закон этого воздействия – $\mathcal{E}(t) \equiv U(t) = U_0 \cdot \cos \Omega t^*$). Будем предполагать, что электрическая цепь помимо источника ЭДС и соединительных проводов включает в себя резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности,

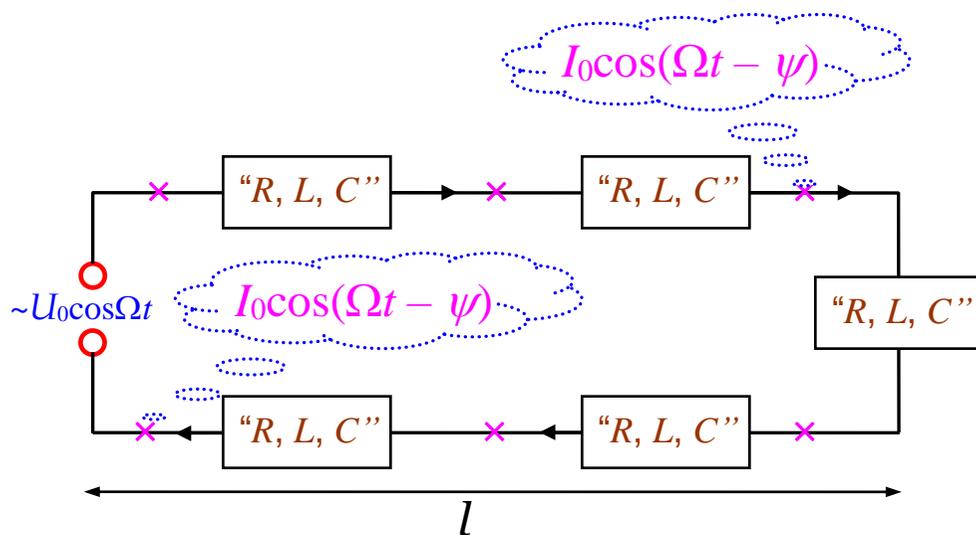


Рис. 2.1. Длинная цепь переменного тока.

*) Именно так чаще всего обозначают ЭДС гармонического источника в учебной литературе. И мы будем придерживаться такого же обозначения.

Глава II. Вынужденные колебания

соединённые друг с другом самым различным образом – см. рис. 2.1.

2.1. Условие квазистационарности

В общем случае выше описанная цепь может быть довольно длинной. Например, соединять различные помещения и даже города и страны. Существуют ли какие-то ограничения для нашего дальнейшего анализа? Да, такие ограничения есть. Хотя, чаще всего, не слишком жёсткие. После подключения к цепи источника ЭДС в ней возникают установившиеся вынужденные электрические колебания. Мы будем считать, что выполняется *условие квазистационарности*. Оно состоит в том, что значения силы тока во всех последовательно соединенных участках цепи в один и тот же момент времени одинаковы. Если в во всех местах цепи, отмеченных крестиками на рисунке 2.1, включить быстродействующие амперметры, то они дадут одно и то же показание в любой момент времени. Это возможно, если любое изменение электромагнитного поля передаётся вдоль цепи очень быстро – т.е. время распространения сигнала τ много меньше периода колебаний ЭДС источника:

$$\tau = \frac{l}{c} \ll T. \quad (2.1)$$

То есть длина цепи должна быть много меньше (хотя

бы в 10 раз) произведения скорости света на период колебаний:

$$l \ll cT. \quad (2.2)$$

Пример

Для цепи, подключенной к бытовой электрической сети с частотой 50 Гц, произведение cT даёт значение $6 \cdot 10^6$ м или 6000 км. Это значит, что такие электрические цепи в пределах города или области работают в условиях квазистационарности с высокой степенью точности. А вот уже для линий, проложенных между удалёнными городами – например, между Москвой и Баку, эти условия могут нарушаться.

2.2. Закон Ома для участка цепи переменного тока

Пусть, как мы и договорились, ЭДС изменяется по гармоническому закону $U(t) = U_0 \cdot \cos \Omega t$ (рис. 2.1). Сила тока *в общем случае не совпадает по фазе с приложенным напряжением*: $I(t) = I_0 \cdot \cos(\Omega t - \psi)^*$. (Так же как в механических колебательных системах смещение и скорость осциллятора не совпадают по фазе с вынуждающим воздействием). Поэтому теряет смысл запись соотношения между *мгновенными значениями* силы тока и напряжения (аналогичная закону Ома для постоянного тока) – оно представляет

*) Знак “-” перед фазовым сдвигом поставлен здесь по аналогии с механическими колебаниями, хотя сила тока может как отставать, так и опережать по фазе напряжение.

Глава II. Вынужденные колебания

собой быстропеременную и весьма сложную функцию времени. Интерес представляет только связь между их *амплитудными* значениями, неизменная во времени при установившихся колебаниях в цепи:

► **“Опр.”** *Отношение амплитуды напряжения к амплитуде силы тока называется полным сопротивлением участка цепи переменного тока*

$$Z = \frac{U_0}{I_0}. \quad (2.3)$$

✚ **Закон Ома для участка цепи переменного тока** *состоит в том, что амплитудное значение силы переменного тока прямо пропорционально амплитудному значению приложенного к участку цепи напряжения:*

$$I_0 = \frac{U_0}{Z}. \quad (2.4)$$

На участке цепи в общем случае могут присутствовать резисторы, катушки индуктивности и конденсаторы. Полное сопротивление Z зависит как от характеристик этих элементов – величин R , L , C , так и от способа их соединения. Кроме того, Z зависит также и от частоты приложенного к цепи напряжения Ω .

Рассмотрим сначала простейшие частные случаи.

2.3. Простые примеры

- **2.3.1.** Пусть на участке цепи **присутствует лишь**

один элемент – резистор R (см. рис. 2.2).

Выясним, каково фазовое соотношение между силой тока и напряжением, а также применим закон

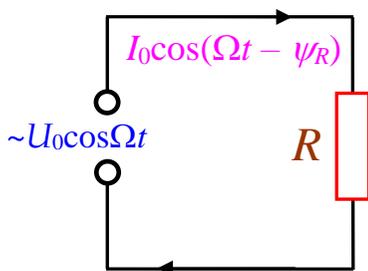


Рис. 2.2. Участок с резистором.

Ома, чтобы найти полное сопротивление Z такого участка. Применим к контуру 2-е правило Кирхгофа – для мгновенных значений силы тока и напряжений оно должно выполняться:

$$U_0 \cdot \cos \Omega t = R \cdot I_0 \cdot \cos(\Omega t - \psi_R).$$

Отметим, прежде всего, что гармонические функции в левой и правой части могут быть равны в любой момент времени только, если $\psi_R = 0$ – т.е. фазовый сдвиг отсутствует. Кроме того, из равенства амплитудных значений получаем

$$I_0 = \frac{U_0}{R}. \quad (2.5)$$

То есть роль полного сопротивления выполняет привычная для нас величина омического сопротивления резистора:

$$Z_R = \frac{U_{0R}}{I_{0R}} \Rightarrow \dots \dots \dots Z_R = R. \quad (2.6)$$

Таким образом, на участке с резистором сила переменного тока меняется по закону:

Глава II. Вынужденные колебания

$$I_R(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \cos \Omega t. \quad (2.7)$$

Отметим ещё раз, что *сила переменного тока, протекающего через резистор, совпадает по фазе с напряжением на нём*. Резистор в цепи переменного тока называют также «активной нагрузкой», а его сопротивление – «активным сопротивлением». Причину этого мы уточним несколько позже*).

• **2.3.2.** К источнику переменной ЭДС **подключен только конденсатор C** (см. рис. 2.3).

В этом случае напряжение на конденсаторе меняется по гармоническому закону, а значит и заряд на его пластинах также меняется по закону:

$$q(t) = C \cdot U(t) = C \cdot U_0 \cos \Omega t. \quad (2.8)$$

Сила тока в цепи равна $\frac{dq}{dt}$. Она меняется поэтому, также по гармоническому закону, однако, со сдвигом по фазе:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\Omega C U_0 \sin \Omega t = \Omega C U_0 \cos(\Omega t + \pi/2). \quad (2.9)$$

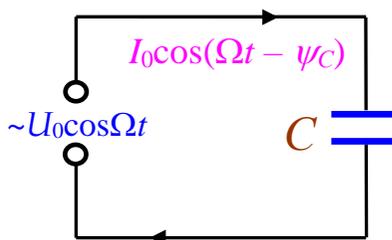


Рис. 2.3. Участок с конденсатором.

*) На такой нагрузке происходит необратимый переход электромагнитной энергии во внутреннюю – в тепло! Однако выделение тепла по закону Джоуля Ленца – не единственная возможная причина такого перехода.

А именно, *сила тока через конденсатор опережает по фазе на $\pi/2$ напряжение на нём*: $\psi_C = -\pi/2$. Видно также, что амплитудное значение силы тока равно:

$$I_0 = \Omega C U_0. \quad (2.10)$$

Используя определение сопротивления участка цепи переменного тока (2.3), получаем значение т.н. «ёмкостного сопротивления»:

$$X_C = \frac{U_0}{I_0} \Rightarrow \dots \dots \dots X_C = \frac{1}{\Omega C} \text{ *)} \quad (2.11)$$

Как видим, ёмкостное сопротивление уменьшается с ростом частоты Ω и увеличением электроёмкости конденсатора C .

• **2.3.3.** Пусть теперь к источнику переменной ЭДС подключена только катушка индуктивности L (см. рис. 2.4).

По 2-му правилу Кирхгофа алгебраическая сумма действующих в контуре ЭДС должна быть равна сумме падений напряжения при обходе этого контура.

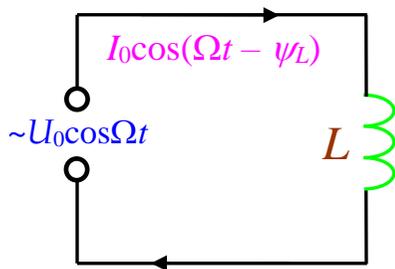


Рис. 2.4. Участок с катушкой

Поскольку в рассматриваемом случае в контуре нет ни резисторов, ни конденсаторов, получаем: сумма ЭДС источника («вынуждающей силы») $U(t)$ и ЭДС

*) Вместо обозначения Z здесь обычно используется « X_C », не меняющее сути дела.

Глава II. Вынужденные колебания

самоиндукции, возникающей в катушке при изменении магнитного поля переменного тока, равна нулю:

$$U(t) - L \frac{dI}{dt} = 0. \quad (2.12)$$

Выражая отсюда производную силы тока и интегрируя, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{1}{L} \cdot U(t) \Rightarrow I(t) = -\frac{U_0}{\Omega L} \cos \Omega t \quad \text{или} \\ I(t) &= \frac{U_0}{\Omega L} \sin(\Omega t - \pi/2). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Сила тока через катушку индуктивности отстаёт по фазе на $\pi/2$ от напряжения на ней $\psi_L = +\pi/2$. При этом амплитудное значение силы тока равно:

$$I_0 = \frac{U_0}{\Omega L}. \quad (2.14)$$

Как и ранее, используя определение (2.3), получаем на этот раз значение "*индуктивного сопротивления*":

$$X_L = \frac{U_0}{I_0} \Rightarrow X_L = \Omega L. \quad (2.15)$$

Оно увеличивается с ростом частоты Ω и увеличением индуктивности катушки L .

2.4. Более сложные цепи

- **2.4.1.** Если на участке цепи переменного тока соединены несколько разных элементов, чтобы найти полное сопротивление и сдвиг фаз удобно воспользоваться методом векторных диаграмм. При

этом мы будем опираться на только что полученные результаты для отдельных элементов. Пусть, например, на участке соединены параллельно резистор и конденсатор – см. рис. 2.5,а. Поскольку общим для них является напряжение, начинаем построение с “вектора-колебания” U – напряжения на участке. Длина этого вектора равна U_0 . Сила тока через резистор совпадает по фазе с напряжением на нём, поэтому вектор I_R для $I_R(t)$ смотрит в ту же сторону и имеет длину U_0/R . Сила тока через конденсатор опережает напряжение на нём по фазе на $\pi/2$. Поэтому вектор I_C для $I_C(t)$ повернут на 90 градусов против часовой стрелки и смотрит вверх (см. рис. 2.5,б). Его длина равна отношению амплитуды напряжения к ёмкостному сопротивлению конденсатора $U_0/X_C = U_0 \cdot \Omega C$. Сила тока, протекающего

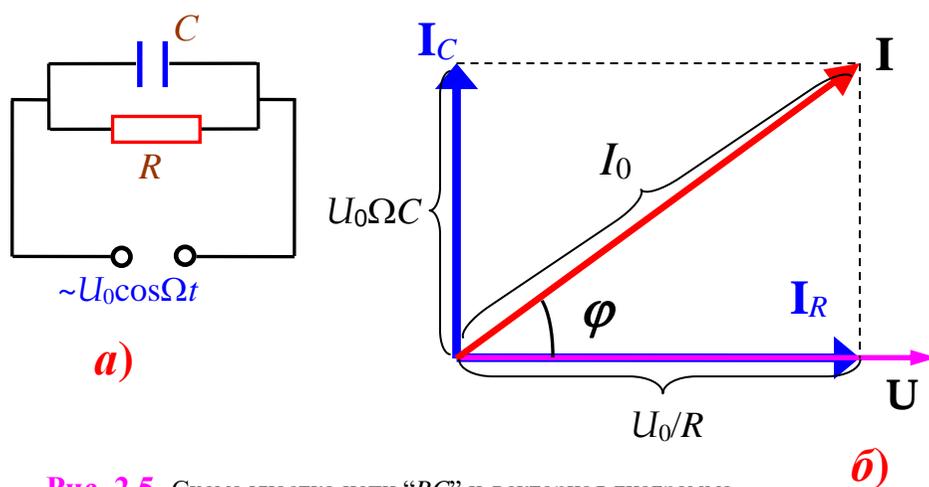


Рис. 2.5. Схема участка цепи “RC” и векторная диаграмма.

Глава II. Вынужденные колебания

по участку, равна сумме сил токов $I_R(t)$ и $I_C(t)$. “Вектор-колебание” I для общей силы тока $I(t)$ строим, суммируя соответствующие векторы. Длина получившегося вектора равна амплитуде силы тока I_0 . Находим её по теореме Пифагора:

$$I_0^2 = \left(\frac{U_0}{R}\right)^2 + (U_0 \cdot \Omega C)^2. \text{ Отсюда}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{R} \cdot \sqrt{1 + (R\Omega C)^2}.$$

Сдвиг фаз между силой тока и напряжением удобно выразить, используя тангенс угла между соответствующими векторами на нашей диаграмме:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Omega C}{1/R} = R\Omega C.$$

В итоге окончательно можно записать для силы тока, протекающего по такому участку:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \sqrt{1 + (R\Omega C)^2} \cdot \cos[\Omega t + \operatorname{arctg}(R\Omega C)].$$

В качестве тренировки аналитические выражения для $I_R(t)$ и $I_C(t)$ запишите самостоятельно.

- **2.4.2.** Ещё один пример – на участке цепи соединены последовательно резистор и катушка индуктивности – рис. 2.6,*а*. Не будем на этот раз описывать построение векторной диаграммы подробно. Она представлена на рис. 2.6,*б*. Используя эту диаграмму, найдите полное сопротивление Z и

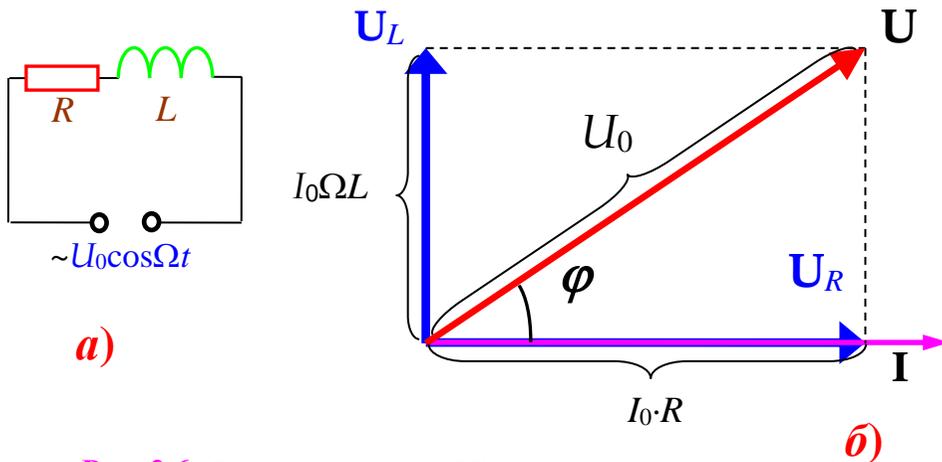


Рис. 2.6. Схема участка цепи “RL” и векторная диаграмма

сдвиг фаз φ между силой тока и напряжением для данного участка цепи. Запишите, кроме того, точный вид функций $U_R(t)$ и $U_L(t)$ и $I(t)$.

2.5. Мощность в цепи переменного тока.

Эффективные значения силы тока и напряжения

• 2.5.1. Участок с резистором

Пусть, для начала, на участке цепи переменного тока присутствует только резистор – рис. 2.7. *Мгновенная мощность* может быть найдена как произведение мгновенных значений приложенного напряжения $U_0 \cos \Omega t$ и силы тока $I(t)$. Как мы уже знаем, обе эти две величины изменяются в

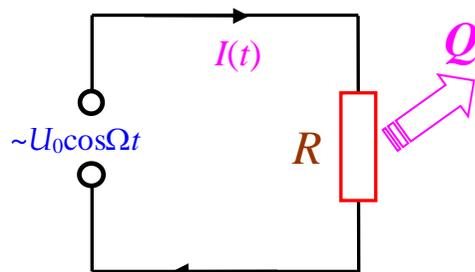


Рис. 2.7. Участок с резистором.

Глава II. Вынужденные колебания

одной фазе, поэтому:

$$P(t) = U_0 \cdot I_0 \cdot \cos^2(\Omega t). \quad (2.16)$$

Лучше представить себе поведение такой функции позволяет простое тригонометрическое преобразование – формула “понижения степени”:

$$P(t) = \frac{1}{2} U_0 \cdot I_0 \cdot [1 + \cos(2\Omega t)]. \quad (2.16,a)$$

График этой зависимости представлен на рис. 2.8. Второе слагаемое в скобках – это быстропеременные колебания с частотой 2Ω . Передача энергии от источника ЭДС (генератора) к “нагрузке” (расход энергии на выделение тепла или совершение механической работы, в случае электродвигателей) определяется не мгновенным, а средним (за большой по сравнению с периодом колебаний промежуток времени) значением мощности $\langle P \rangle$. Усредняя мгновенную мощность (2.16,a) по времени, получим,

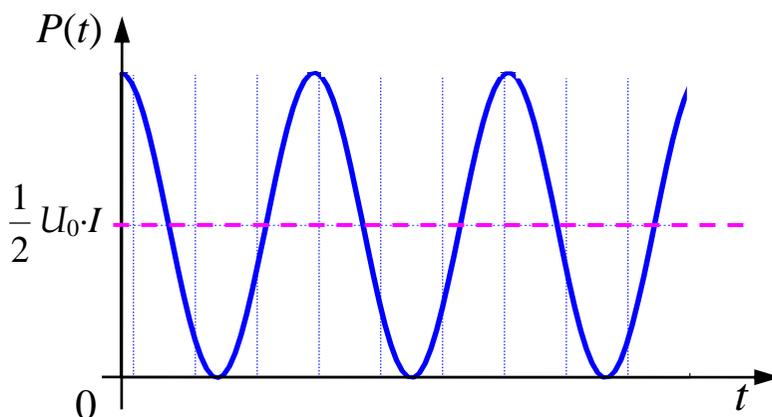


Рис. 2.8. Мгновенная мощность на резисторе.

что средняя мощность равна:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} U_0 I_0. \quad (2.17)$$

Например, количество выделяющегося на таком участке тепла можно получить, умножая среднюю мощность на время протекания тока: $Q = \langle P \rangle \cdot \tau$.

Чтобы придать записи вид, аналогичный случаю постоянного тока, вводятся величины, отвечающие за его эффективность (например, тепловое действие), называемые «действующие» или «эффективные»:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= U_\delta \cdot I_\delta \text{ или } \langle P \rangle = I_\delta^2 \cdot R \Rightarrow \\ I_\delta &= \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad U_\delta = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Т.о. протекание по участку цепи переменного тока с сопротивлением R вызывает в нём такое же тепловое действие, что и тока постоянного с силой $I_\delta = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$. Эта

величина называется *действующим* (или *эффективным*) *значением силы переменного тока*. По аналогии введено и понятие *действующего* (*эффективного*)

значения переменного напряжения: $U_\delta = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$.

❖ **Замечание**

Данные равенства не следует рассматривать, как *определения* действующих значений напряжения и силы тока. В *общем случае несинусоидального*

Глава II. Вынужденные колебания

переменного тока коэффициент, связывающий амплитудное и действующее значения, будет иным. Найти его можно также, усредняя по времени мгновенную мощность. Нетрудно получить и соответствующие расчётные формулы:

$$I_{\delta}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt; \quad U_{\delta}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U^2(t) dt. \quad (2.19)$$

Например, для «пилообразного» напряжения (см. рис. 2.9) получается коэффициент $\frac{1}{\sqrt{3}}$: $U_{\delta} = \frac{U_0}{\sqrt{3}}$ и $I_{\delta} = \frac{I_0}{\sqrt{3}}$.

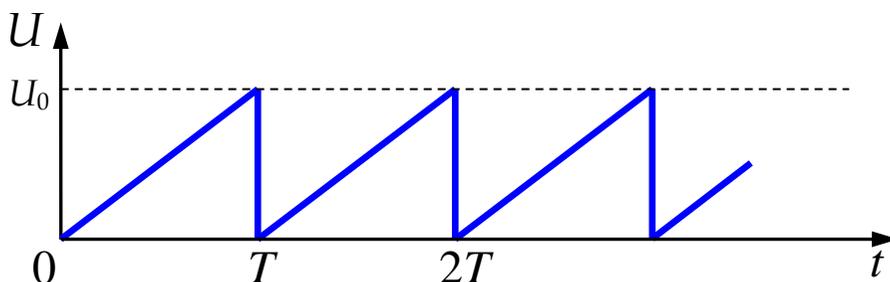


Рис. 2.9. Пилообразное напряжение.

2.6. Общий случай. Участок с элементами R, L, C

Мгновенная мощность для случая, когда гармоническое напряжение $U_0 \cos \Omega t$ приложено к цепи с произвольным соединением элементов (назовём её условно «*цепь R, L, C* ») может быть записана в виде:

$$P(t) = U_0 \cdot \cos(\Omega t) \cdot I_0 \cdot \cos(\Omega t - \psi). \quad (2.19)$$

Используя тригонометрические преобразования для произведения косинусов, нетрудно показать, что это также (как и в случае участка с резистором)

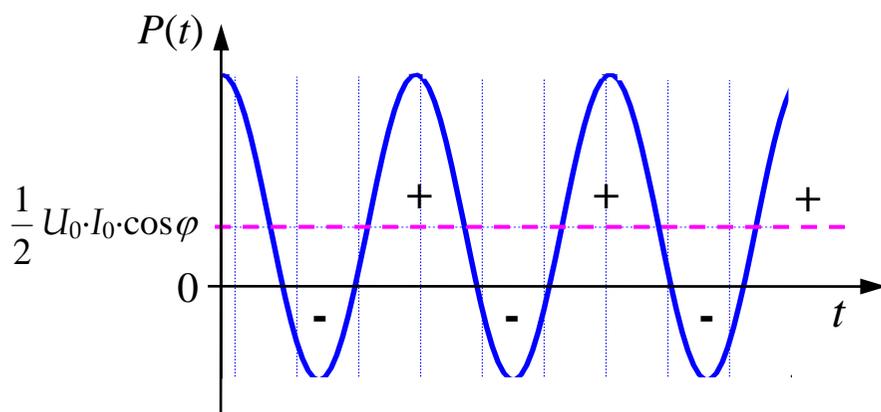


Рис. 2.10. Мгновенная мощность на участке «цепи RLC».

быстропеременная функция с частотой 2Ω :

$$P(t) = \frac{1}{2} U_0 \cdot I_0 \cdot [\cos \varphi + \cos(2\Omega t - \varphi)]. \quad (2.20)$$

Её график отличается от представленного на рис. 2.8 тем, что «косинусоида» смещена вниз и имеет отрицательные участки – см. рис. 2.10^{*)}. Если только, конечно, фазовый сдвиг не равен нулю, как для участка с резистором. Энергетическую эффективность переменного тока (например, его тепловое действие) найдём, как и ранее, усредняя мгновенные значения мощности (2.20). Получим, что в общем случае средняя мощность равна:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} U_0 \cdot I_0 \cdot \cos \psi. \quad (2.21)$$

Как мы помним, ψ – «отставание» по фазе силы

^{*)} Мы надеемся, что внимательный читатель не упустит сходства с графиком на рис. 1.6 предыдущего параграфа.

Глава II. Вынужденные колебания

тока от напряжения на данном участке цепи. Величину $\cos \psi$ называют «*коэффициентом мощности*» данного участка, поскольку он «управляет», как мы видим, эффективностью энергопередачи от источника к «нагрузке» (данный участок цепи с включёнными в него приборами). Среднюю мощность можно записать также, используя понятие действующих значений:

$$\langle P \rangle = I_{\delta} \cdot U_{\delta} \cdot \cos \varphi. \quad (2.22)$$

❖ **Замечания**

1. Если сдвиг фаз между силой тока и напряжением оказывается равным $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$, то средняя энергия, передаваемая от источника нагрузке равна нулю. Говорят, что такая нагрузка носит «*реактивный характер*».

2. Если $\varphi \neq \pm \frac{\pi}{2}$, то по аналогии с постоянным током для средней передаваемой от источника к нагрузке мощности можно записать равенство:

$$\langle P \rangle = I_{\delta}^2 \cdot R_a. \quad (2.23)$$

Как раз в этом равенстве содержится, по сути, определение нового понятия:

► **“Опр.”** *Коэффициент между средней мощностью и квадратом действующего значения*

Глава II. Вынужденные колебания

силы тока называется активным сопротивлением участка цепи переменного тока

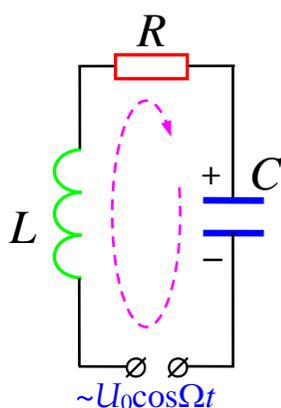
$$R_a = \frac{\langle P \rangle}{I_{\text{д}}^2}. \quad (2.24)$$

Заметим, кроме того: используя закон Ома, легко показать, что $R_a = Z \cdot \cos \varphi$.

§ 3. Резонансные явления в цепях переменного тока

3.1. Последовательный RLC – контур

При общем обсуждении вынужденных колебаний мы привели в качестве примера электрической колебательной системы контур с последовательно соединёнными резистором, катушкой индуктивности и конденсатором (элементами R , L и C). Источником внешнего гармонического воздействия в контуре является генератор переменной ЭДС $U(t) = U_0 \cos \Omega t$ –



см. рис. 3.1. Напомним дифференциальное уравнение вынужденных колебаний – переменного тока – для такой цепи, составленное в соответствии со 2-м правилом Кирхгофа:

Рис. 3.1. Контур RLC с источником ЭДС.

Глава II. Вынужденные колебания

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = u_0 \cdot \cos \Omega t. \quad (3.1)$$

Дальнейший анализ можно провести аналогично общему подходу, рассмотренному в §1: записать решение для установившихся вынужденных колебаний заряда на конденсаторе, получить соответствующие амплитудно-частотную и фазо-частотные зависимости ...

Мы, однако, не будем повторяться, а определим силу переменного тока в контуре, воспользовавшись сразу векторной диаграммой для токов и напряжений – см. рис. 3.2.

При последовательном соединении общим для всех элементов является сила тока, поэтому

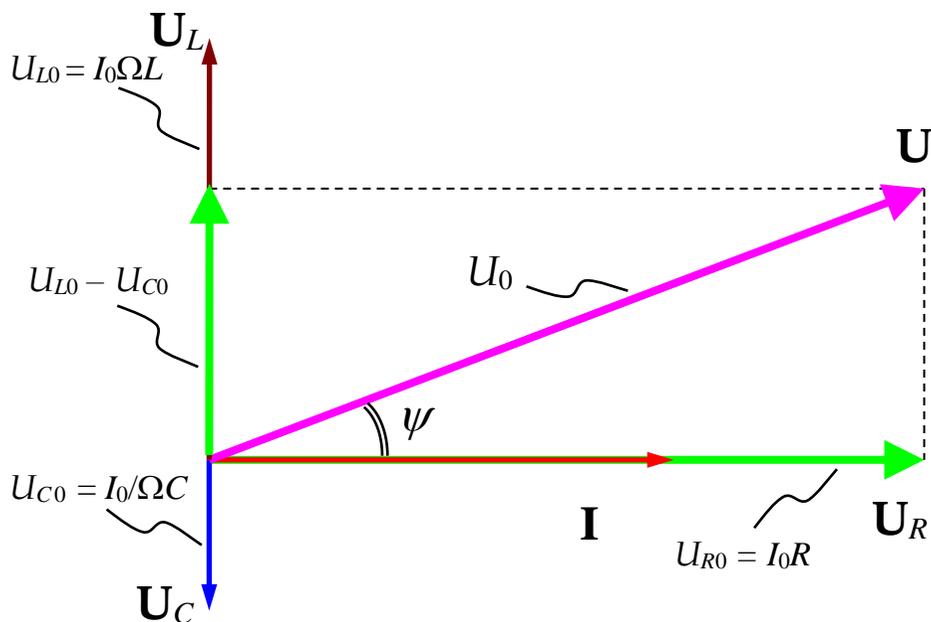


Рис. 3.2. Векторная диаграмма RLC -контура

Глава II. Вынужденные колебания

начинаем построение с “вектора-колебания” I . Длина этого вектора равна I_0 . Напряжение на резисторе совпадает по фазе с силой тока, протекающего через него. Поэтому вектор U_R для $U_R(t)$ смотрит в ту же сторону и имеет длину I_0R . Напряжение на катушке опережает силу тока по фазе на $\pi/2$ – вектор U_L для $U_L(t)$ повернут на 90 градусов против часовой стрелки, и смотрит вверх. Его длина равна произведению амплитуды силы тока на индуктивное сопротивление катушки $I_0X_L = I_0 \cdot \Omega L$. Напряжение на конденсаторе отстает от силы тока на $\pi/2$ – вектор U_C для $U_C(t)$ повернут на 90 градусов по часовой стрелке, и смотрит вниз. Его длина равна произведению амплитуды силы тока на ёмкостное сопротивление конденсатора $I_0X_C = I_0/\Omega C$. Сумма колебаний на участках R , L и C должна быть равна вынуждающему воздействию – колебанию ЭДС генератора, включённого в контур. Длина вектора, полученного суммированием векторов U_R , U_L и U_C , равна амплитуде U_0 . Находим её по теореме Пифагора (см. рис. 3.2):

$$U_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2}. \quad (3.2)$$

Глава II. Вынужденные колебания

Отсюда для амплитуды силы тока в “последовательном RLC – контуре”*) легко получаем:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}}. \quad (3.3)$$

Как видим, для частного случая последовательно соединённых катушки индуктивности, конденсатора и резистора полное сопротивление цепи, равно

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}. \quad (3.4)$$

Отставание по фазе силы тока от напряжения, как и ранее, удобно выразить через тангенс угла между соответствующими векторами на нашей диаграмме:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\Omega L - 1/\Omega C}{R}.$$

В нашем примере (на векторной диаграмме) угол положителен и ток действительно отстаёт по фазе от напряжения. В таких случаях принято говорить, что «нагрузка носит индуктивный характер». Однако, при иных значениях величин L , C и Ω угол может оказаться отрицательным – это означает, что отставать будет уже напряжение и «характер» нагрузки будет уже «ёмкостным».

*) Здесь мы использовали устоявшуюся в радиотехнике компактную терминологию.

Глава II. Вынужденные колебания

Самое интересное в полученных результатах – зависимость амплитуды силы тока I_0 и фазового сдвига ψ от частоты Ω приложенного напряжения $U(t)$. При этом амплитудно-частотная зависимость, как и в случае механических колебательных систем, имеет

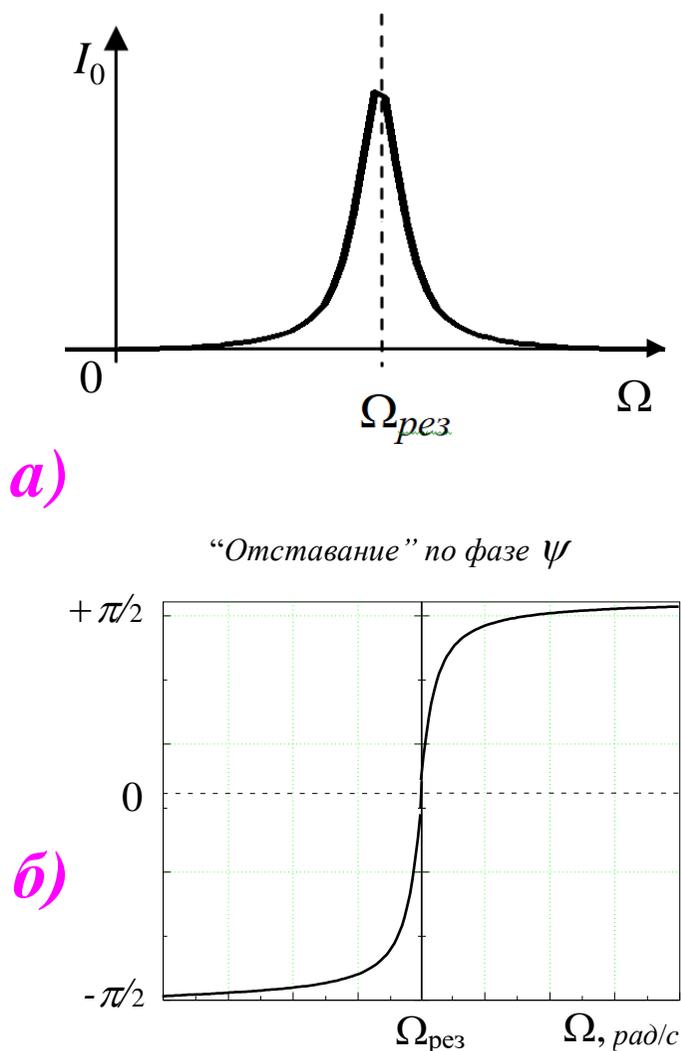


Рис. 3.3. Амплитудно-частотная (а) и фазо-частотная (б) зависимости при резонансе в последовательном контуре

Глава II. Вынужденные колебания

существенно немонотонный характер. При частоте $\Omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ наблюдается резонанс – амплитуда силы тока максимальна. Для контура с небольшим омическим сопротивлением R она быстро убывает при отклонении от этой частоты, как в меньшую, так и в большую стороны – см. рис. 3.3,а. Фазо-частотная зависимость монотонна, но для высокодобротного контура сдвиг фазы при переходе через резонанс довольно резко меняет знак – см. рис. 3.3,б. Проследить за этим изменением и не ошибиться в знаке помогает всё та же векторная диаграмма на рис. 3.2.

Рекомендуем для тренировки, опираясь на проведенный анализ, написать самостоятельно аналитические выражения для функций $U_R(t)$, $U_L(t)$ и $U_C(t)$.

3.2.* Понятие о резонансе в параллельном контуре

Резонанс иного рода можно наблюдать при параллельном подключении к генератору катушки индуктивности и конденсатора. В эквивалентной схеме реальной цепи необходимо учесть ещё и активное сопротивление, которое вносит свои коррективы. Однако начнём анализ мы с идеализации, представленной на рис. 3.4. Здесь же построена и векторная диаграмма для такого случая – общим для катушки и конденсатора является приложенное напряжение. Как видим, токи, протекающие в параллельных ветвях, оказываются противоположны по фазе. Их сила (длина векторов) зависит от частоты Ω . Видно, что длина результирующего вектора уменьшается при выравнивании реактивных сопротивлений элементов. При частоте $\Omega_p = 1/\sqrt{LC}$ его длина должна обратиться в 0, что

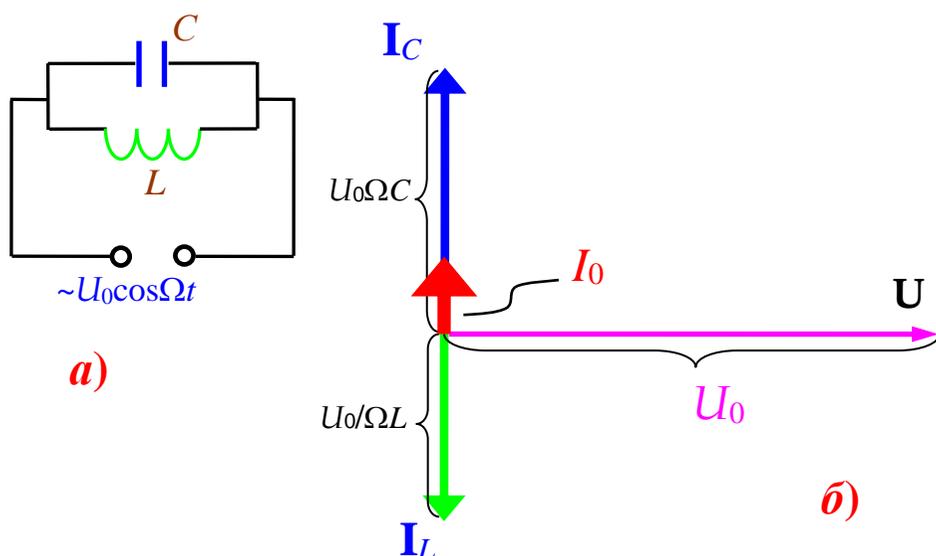


Рис. 3.4. Параллельный контур: схема (а) и векторная диаграмма (б)

означало бы бесконечно большое сопротивление такого участка для переменного тока – ток в подводящих проводах исчезает! При этом амплитуда сил токов в каждой их ветвей может быть большой. Такую ситуацию называют «балансом токов».

А теперь «добавим реальности». Как мы уже отмечали в эквивалентной электрической схеме необходимо учесть наличие активного сопротивления катушки r и резистора R в цепи генератора – см. рис. 3.5,а. Договоримся при этом, что контур обладает всё же большой добротностью Q – только такой случай и представляет практический интерес, о котором мы тоже упомянем в заключении.

Внесённые коррективы не меняют сути дела – при приближении к резонансной частоте сопротивление контура переменному току резко и значительно увеличивается. Это следует из векторной диаграммы, представленной на рис. 3.5,б. Можно показать, что оно стремится к значению в Q раз превосходящему сопротивление r . Во столько же раз возрастает и амплитуда сил токов в параллельных ветвях, в то время как амплитуда силы тока в подводящих проводах стремится к нулю – сравните длину красной

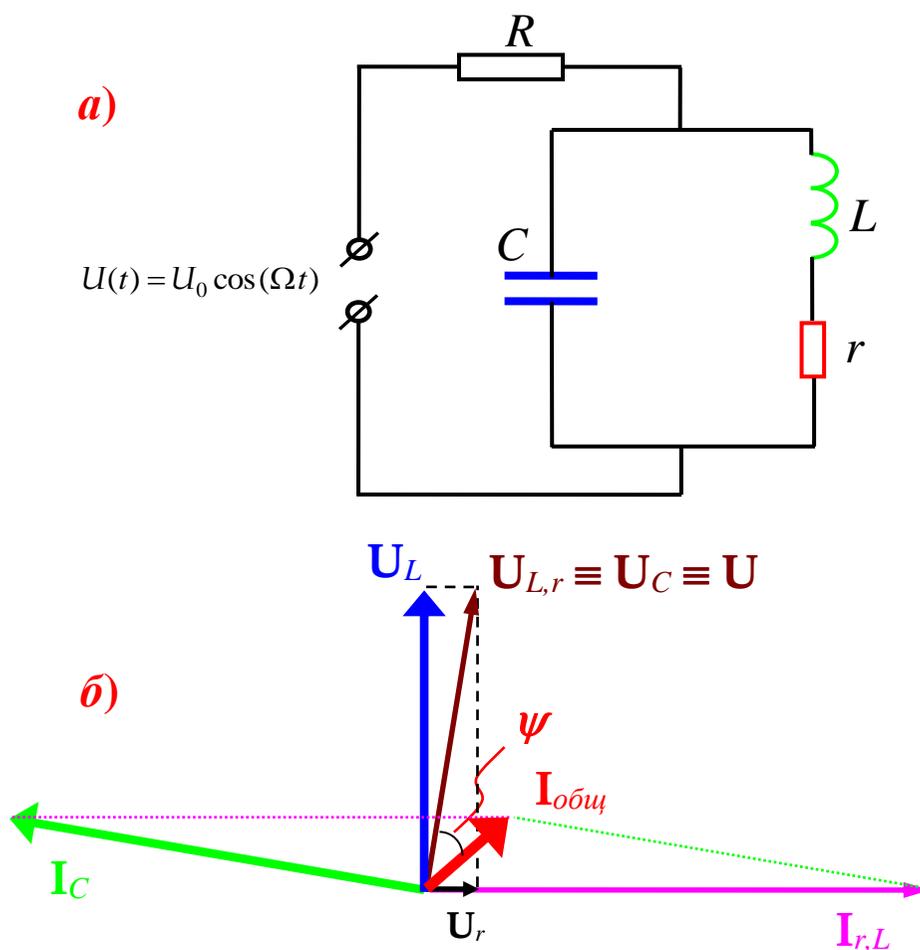


Рис. 3.5. Схема и векторная диаграмма для реального параллельного контура.

стрелки ($I_{общ}$) с зелёной (I_C) и маренговой ($I_{r,L}$) на нашей векторной диаграмме. Практически всё напряжение генератора падает на участке с контуром. При отстройке от резонанса, его сопротивление стремится к r на низких частотах и нулю на высоких. Напряжение падает в основном на резисторе R .

Для параллельного колебательного контура привычный для нас уже вид резонансной кривой с характерным узким и высоким

Глава II. Вынужденные колебания

максимумом принимает зависимость сопротивления переменному току. Может ли это быть полезным? Да, такой резонанс можно использовать, например, для выделения одного нужного колебания из сложного сигнала, содержащего компоненты на иных частотах. Ведь для всех частот за пределами узкой полосы вблизи резонансной сопротивление контура очень мало. А значит, малы и амплитуды соответствующих напряжений. В качестве примера вспомним входную часть любого устройства принимающего радио-(теле-)сигналы. На рис. 3.6 представлена схема простого радиоприёмника. Электромагнитные волны возбуждают в его антенне быстропеременный ток на несущих частотах источников всех радиоволн. Селектор приёмника, очевидно, должен выделить из них только колебания одной частоты. Для этого и служит колебательный контур, настраиваемый в резонанс. При резонансе амплитуда колебаний напряжения с частотой $\Omega_{рез}$ на реактивных элементах контура максимальна, в то время как на остальных частотах остаётся ниже уровня шумов. Соответствующий полезный сигнал может быть обработан, дополнительно усилен и преобразован в звук или изображение. Чем больше добротность контура (уже резонансная кривая), тем выше его селективность и качество отстройки от помех.

Не углубляясь в радиотехнические подробности, отметим, что аналогично используются свойства контура и в ряде других устройств – резонансных фильтрах, усилителях, индукционных печах, ...

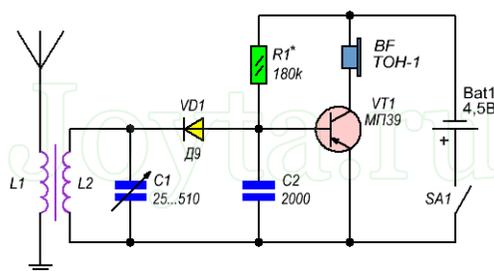


Рис. 3.6. Схема простого радиоприёмника.

Глава III. Волны

*“Путешественнику на корабле
кажется, что океан состоит из
волн, а не из воды”*

А. Эддингтон, 1929

Начнём сразу с определения:

► **“Опр.”** *Волна – процесс распространения колебаний в пространстве*

Новый аспект нашего анализа состоит в том, что, изучая колебания, мы имели дело с «локальными» явлениями – достаточно вспомнить маятники и колебательный контур. Даже обсуждая процессы в относительно протяжённых электрических цепях, мы оговорили условия квазистационарности, позволившие нам считать, что сила тока одинакова в точках с разными координатами вдоль этой цепи в каждый данный момент времени. Поэтому величина ξ зависела лишь от одной переменной – а именно от времени и только – $\xi(t)$.

При определённых условиях, однако, колебания (возмущения) могут передаваться от точки к точке пространства, то есть распространяться. Величина ξ является в этом случае уже функцией не только времени, но и координат: $\xi = \xi(\vec{r}, t)$. Обсудим сначала простейший одномерный случай зависимости только от одной координаты – $\xi(x, t)$. И начнём, как обычно, с рассмотрения механической системы.

§ 1. Упругие волны

1.1. Дифференциальное волновое уравнение

Сначала уточним модель для проведения первичного анализа нового явления. Затем будем её усложнять.

Наша модель, представленная на рис. 1.1, предполагает:

- 1) система состоит из длинной цепочки большого количества одинаковых связанных атомов массы m ;
- 2) амплитуды колебаний малы, силы квазиупруги и моделируются пружинами жёсткости k^*);
- 3) система консервативна;
- 4) расстояние l между соседними осцилляторами очень мало;
- 5) соседние шарики-атомы^{*)} движутся почти одинаково;

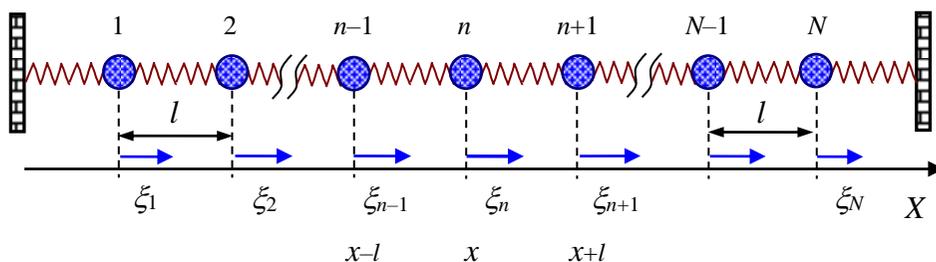


Рис. 1.1. Модель: Одномерная цепь связанных осцилляторов.

^{*)} Жёсткость пружинков мы обозначаем теперь немного иначе, (“ k^* ”) поскольку символ “ k ” будет использован далее для волнового числа.

^{*)} Мы продолжим использовать «химическую» аналогию с движением микрочастиц вещества.

Глава III. Волны

Такая модель в начальном приближении соответствует одномерному кристаллу или длинной полимерной молекуле. Запишем теперь уравнения движения для атома с произвольным номером “ n ”:

$$m \ddot{\xi}_n = \kappa(\xi_{n+1} - \xi_n) - \kappa(\xi_n - \xi_{n-1}). \quad (1.1)$$

Поскольку n -й атом имеет координату x , пользуясь малостью l , заменим смещения ξ_n , на функцию $\xi(x, t)$. А также разложим функции для смещений атомов с номерами $(n - 1)$ и $(n + 1)$ в ряд Тейлора по малому параметру l , ограничиваясь при этом тремя первыми слагаемыми:

$$\xi_{n-1} = \xi(x - l, t) \approx \xi(x, t) - \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot l + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot \frac{l^2}{2}. \quad (1.2)$$

$$\xi_{n+1} = \xi(x + l, t) \approx \xi(x, t) + \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot l + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot \frac{l^2}{2}; \quad (1.3)$$

После подстановки разложений (1.2) и (1.3) в уравнение (1.1), получаем уравнение для функции смещения произвольного атома $\xi(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\kappa l^2}{m} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (1.4)$$

Обнаружив, что коэффициент перед производной $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ имеет размерность квадрата скорости, уравнение

(1.4) можно записать так:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad \text{где} \quad (1.4, a)$$

$$v^2 = \frac{\kappa l^2}{m}. \quad (1.5)$$

С математической точки зрения это линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Оно описывает распространение возмущений вдоль цепочки атомов в нашем “одномерном кристалле”.

► **“Опр.”** Уравнение (1.4,а) называется **одномерным классическим дифференциальным волновым уравнением**

Термин “классическое” применяется для того, чтобы указать на ограниченный диапазон использования этого уравнения – только в случае *малых возмущений*, распространяющихся в *недиспергирующих средах* (объяснение этого термина будет приведено несколько позже).

Запись уравнения (1.4,а) можно обобщить и на трёхмерный случай:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \cdot \Delta \xi. \quad (1.4,б)$$

Здесь $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ – оператор Лапласа.

❖ Замечания

В нашей модели колебания атомов происходят вдоль направления распространения возмущений. Это – продольная волна.

► **“Опр.”** Волна называется продольной, если колебания происходят вдоль направления распространения возмущений

Можно показать, что и в случае, когда колебания частиц происходят в перпендикулярном направлении, получается точно такое же дифференциальное уравнение, описывающее процесс распространения колебаний. Такие волны называются поперечными.

► **“Опр.”** Волна называется поперечной, если колебания происходят перпендикулярно направлению распространения возмущений

1.1. Уравнение волны

Будем пока придерживаться частного случая, описываемого нашей оговоренной выше моделью. Волну, бегущую вдоль цепочки атомов, называют по понятным причинам волной упругой. Смещения частиц должны подчиняться волновому уравнению (1.4). Какова же функция $\xi(x,t)$ в этом случае?

“Опр.” Уравнением упругой волны называется соотношение, описывающее зависимость смещения колеблющихся частиц $\xi(x,t)$ от координат и времени в явной форме

То есть, проще говоря, это конкретный вид решения волнового уравнения (1,4). На случай волны электромагнитной данное определение легко обобщить, заменив смещения частиц в уравнении волны на характеристики

Глава III. Волны

электромагнитного поля – напряжённость электрического или индукцию магнитного полей.

Чтобы угадать вид функции для нашего частного случая “одномерного кристалла” (рис. 1.1) будем предполагать, что в начале координат ($x = 0$) колебания “первого” атома происходят по гармоническому закону:

$$\xi(0,t) = A \cdot \cos \omega t. \quad (1.6)$$

На соседние атомы будет действовать гармоническая возмущающая сила с частотой ω , и это возмущение будет постепенно распространяться всё дальше от “начального” атома с некоторой скоростью v . В отсутствие затухания (систему предполагаем консервативной, а возмущение распространяется только вдоль одного направления OX) колебания атома, расположенного в точке с координатой x , будут повторять колебания первого с опозданием на время $\tau = x/v$:

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos[\omega(t - \tau)] = A \cdot \cos(\omega t - kx). \quad (1.7)$$

Здесь введены новые обозначения $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$ – так называемое “волновое число”, λ – длина волны. Подставляя функцию (1.7) в дифференциальное волновое уравнение (1.4), убеждаемся в том, что эта функция – действительно одно из его решений. Причём введённый ранее только из соображений размерности параметр v по физическому смыслу соответствует скорости распространения фазы волны

и называется поэтому “*фазовой скоростью*”. И так

► **“Опр.”** Уравнением гармонической бегущей волны*) называется функция координат и времени вида:

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx). \quad (1.7)$$

❖ Замечания

- 1) Классическому дифференциальному волновому уравнению (1.4) удовлетворяют гармонические волны (1.7) различных частот ω (при том, однако, условии, что скорости распространения этих волн не зависят от частоты). *Среды, в которых скорости распространения волн с разными частотами одинаковы, называются “недиспергирующими”.*
- 2) Решение волнового уравнения в виде гармонической функции (1.7) не является единственно возможным. Прямой подстановкой можно убедиться, что и любая достаточно плавная функция $\xi(t - x/v)$ также будет решением уравнения (1.4). Таким функциям соответствуют распространяющиеся по оси X со скоростью v волны с иным профилем – *негармонические волны.*

Дадим здесь определения некоторым новым понятиям

*) Речь идёт пока об оговоренном одномерном случае.

► **“Опр.”** *Волновой поверхностью называется поверхность, колебания во всех точках которой, происходят в одной и той же фазе*

Из определения ясно, что волновых поверхностей бесконечно много. В модели одномерного кристалла (рис. 1.1) каждая волновая поверхность вырождается в точку. Имеет смысл специально выделить “переднюю” волновую поверхность, которая называется **фронтом волны**.

► **“Опр.”** *Длиной волны называется расстояние, на которое фронт волны (или любая волновая поверхность) смещается за один период колебаний*

Можно сказать также, что **длина волны (λ) это расстояние между ближайшими точками вдоль направления распространения волны, колебания в которых происходят в одной фазе**

Прежде, чем перейти к обсуждению волновых решений отличных от функции (1.7), зафиксируем ещё раз характеристики волны $\xi(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx)$.

Итак, эта волна:

- 1) гармоническая (“монохроматическая”);
- 2) “бегущая” в положительном направлении оси Ox ;
- 3) распространяется в среде без поглощения;
- 4) плоская.

Последний термин нуждается в дополнительном уточнении. К нему мы и перейдём.

1.2. “Другие” волны

Если выйти за рамки нашей модели, то обнаружится, что волны могут отличаться по форме волновой поверхности. Ведь в реальности колебание распространяется в трёхмерном пространстве, а их источник может иметь разную форму. При обобщении на трёхмерную ситуацию наша модель должна предполагать, что исходные гармонические колебания происходят совершенно одинаково во всех точках плоскости YOZ . Т.е. источник такой волны должен иметь бесконечные размеры. А колебания от него передаются без изменений в направлении OX . Вот такая волна и называется “плоской”.

► **“Опр.”** *Если фронт волны и волновые поверхности – плоскости, то волна называется плоской*

Очевидно, в реальности бесконечно протяжённых источников не бывает. Однако приближённо плоскую волну можно наблюдать в тех случаях, когда расстояние x до точки наблюдения от плоского источника больших размеров D много меньше этих размеров:

$$x \ll D. \quad (1.8)$$

Глава III. Волны

Плоская волна, распространяющаяся по оси X , описывается уравнением (1.7), поскольку все точки, лежащие на одной и той же волновой поверхности (плоскости, перпендикулярной оси X), колеблются одинаково. Для плоской волны часто используют форму записи уравнения волны в полярной системе координат (см. рис. 1.2). Введем радиус-вектор \vec{r} , проведенный из

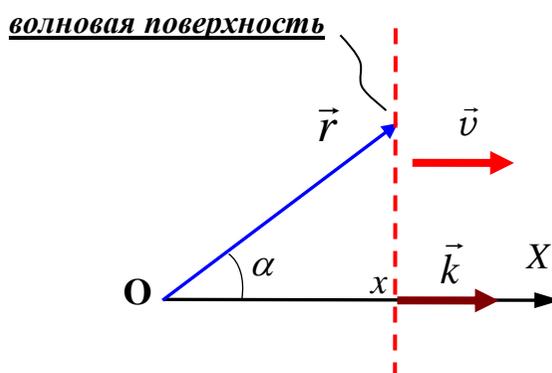


Рис. 1.2. Плоская волна в полярных координатах.

начала полярной системы координат O в произвольную точку пространства, а также волновой вектор \vec{k} , равный по модулю волновому числу и направленный по нормали к волновой поверхности в сторону распространения волны (в данном случае по оси X). Тогда $kx = k \cdot r \cdot \cos \alpha = (\vec{k}, \vec{r})$ и уравнение плоской волны может быть записано в виде

$$\xi(r, t) = A \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r}). \quad (1.9)$$

Поменяем теперь условие на противоположное – пусть теперь

$$D \ll x, r. \quad (1.10)$$

Глава III. Волны

Ясно, что физически это означает, что мы находимся на большом расстоянии от источника конечных размеров. Тогда независимо от его реальной формы, он превращается в “*точечный источник*”. Волна от такого источника бежит во все стороны. Волновые поверхности имеют сферическую форму, а волна в этом случае называется *сферической*.

Может ли сферическая волна описываться тем же уравнением (1.7)? Ясно, что по мере удаления от источника испущенная им энергия будет перераспределена по всё возрастающему количеству частиц-осцилляторов среды. Энергия, приходящаяся на одну частицу, определяется плотностью энергии. Это значит, что она обратно пропорциональна площади волновой поверхности, которой она принадлежит. Для сферической волны площадь волновых поверхностей равна $4\pi r^2$ – плотность энергии убывает обратно пропорционально r^2 . Если, кроме того, мы вспомним, что энергия осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды (см., например, (1.13) и (1.14)), то поймём, что амплитуда колебаний частиц для сферической волны должна убывать по закону $\sim 1/r$. В итоге уравнение сферической волны в непоглощающей среде следует записать так:

$$\xi(r,t) = \frac{A_0}{r} \cdot \cos(\omega t - kr). \quad (1.11)$$

❖ Замечания

1) Физической причиной отмеченного падения амплитуды сферической (да и любой другой волны кроме плоской) является «разбегание» (перераспределение) колебательной энергии. Кроме того, если часть энергии волны отбирает *поглощающая среда*, то происходит дополнительное уменьшение её амплитуды. Учесть поглощение можно, добавив экспоненциальный множитель в закон убыли амплитуды аналогично случаю затухающих колебаний:

$$A(x) = A_0 e^{-\eta x} \text{ – плоская волна;} \quad (1.12)$$

$$A(r) = \frac{A_0}{r} \cdot e^{-\eta r} \text{ – сферическая волна.} \quad (1.13)$$

Параметр η называется *коэффициентом поглощения* среды.

2) Закон убыли амплитуды при поглощении, как мы только что отметили, внешне похож на закон уменьшения амплитуды затухающих колебаний. Надо помнить при этом, что аргументы функций разные – в одном случае время, в другом – координата.

3) Подчеркнём, что соотношения (1.7), (1.9), (1.11)–(1.13) описывают как *продольные волны* (смещение частиц происходит вдоль направления распространения волны), так и *поперечные волны* (частицы колеблются в плоскости, перпендикулярной направлению распространения).

1.4. Перенос энергии упругой волной

Начнём рассмотрение вопроса об энергии, переносимой упругой волной, на примере простой модели продольной волны в одномерном кристалле (рис. 1.1). Вычислим энергию, приходящуюся на один “элемент” нашего кристалла – один “атом” массой m и одну связь (пружину) с коэффициентом упругости k – см. рис. 1.3. Полная механическая энергия

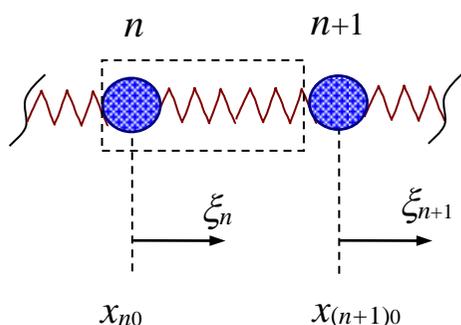


Рис. 1.3. “Элемент” цепочки атомов.

складывается, как мы помним, из кинетической и потенциальной. Кинетическая энергия элемента – это энергия “атома”, движущегося со скоростью $\frac{\partial \xi}{\partial t}$:

$$T = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2. \quad (1.14)$$

Потенциальная энергия деформированной пружины пропорциональна квадрату величины её деформации $(\xi_{n+1} - \xi_n)^2$; используя малость параметра l можно написать $(\xi_{n+1} - \xi_n) \approx \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot l$, откуда получаем:

$$U = \frac{\kappa \cdot (\text{деформация})^2}{2} = \frac{\kappa l^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = \frac{mv^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2. \quad (1.15)$$

В итоге полная энергия элемента одномерного кристалла равна:

$$W = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (1.16)$$

Этот результат может быть естественным образом обобщён и на любые (не обязательно одномерные) среды с распределёнными параметрами. Для этого нужно только заменить массу одного элемента на массу, приходящуюся на единицу объёма среды (т.е. плотность ρ), при этом получим полную энергию, приходящуюся на единицу объёма среды, в которой распространяется упругая волна, то есть её плотность:

$$w = \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (1.17)$$

Для плоской гармонической волны, распространяющейся по оси X (как продольной, так и поперечной), зависимость смещения от координаты и времени определяется уравнением (1.7), откуда **плотностью кинетической энергии упругой волны равна**

$$w_k = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \frac{\rho}{2} A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx), \quad (1.18)$$

а потенциальной

$$w_n = \frac{\rho}{2} \left(v \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = \frac{\rho}{2} A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) = w_k. \quad (1.19)$$

Из соотношений (1.18)–(1.19) получаем:

$$w = w_k + w_n = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx). \quad (1.20)$$

На рис. 1.4 показаны “мгновенная фотография” – профиль волны $\xi(x, t_0)$, а также и пространственное распределение компонент плотности энергии – функции $w_k(x, t_0)$ и $w_n(x, t_0)$ в тот же момент времени t_0 для бегущей упругой волны. Как видим, максимумы плотности кинетической и потенциальной энергии в бегущей волне локализованы в одних и тех же местах (там, где $\xi = 0$). С течением времени вся, представленная на рис. 1.4 картинка, смещается по оси X со скоростью волны v . В любой фиксированной

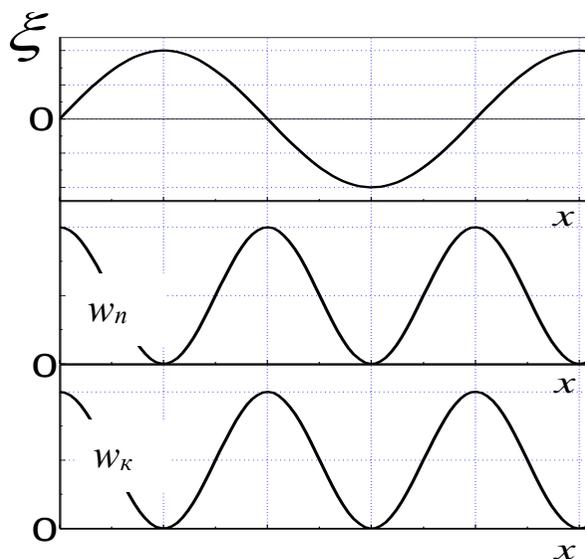


Рис. 1.4. Плотность энергии упругой волны.

Глава III. Волны

точке пространства величина плотности энергии со временем пульсирует (период пульсаций в два раза меньше периода волны – см. рис. 1.4). Поэтому представляет интерес определить среднее по времени (или в пространстве) значение плотности энергии $\langle w \rangle$. Учитывая, что усреднение по времени квадрата синуса дает $\frac{1}{2}$, получаем:

$$\langle w(t) \rangle = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2}. \quad (1.21)$$

Для описания переноса энергии упругой волной в разных случаях удобно использовать несколько физических величин.

Плотность потока энергии S – энергия, переносимая волной в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны. Численно эта величина равна энергии, заключённой внутри цилиндрической поверхности с единичным основанием и образующей, равной v :

$$S(t) = w(t) \cdot v. \quad (1.22)$$

Как видим, плотность потока энергии является функцией времени, поскольку зависит от времени величина $w(t)$ – см. (1.20).

Интенсивностью волны I называется среднее по времени значение плотности потока энергии волны:

$$I = \langle S(t) \rangle = \langle w(t) \rangle \cdot v = \frac{\rho \cdot A^2 \omega^2 \cdot v}{2}. \quad (1.23)$$

Глава III. Волны

Русским учёным-физиком Н.А. Умовым в 1874 г. была введена векторная характеристика переноса энергии упругой волной:

$$\vec{S}(t) = w(t) \cdot \vec{v}. \quad (1.24)$$

Впоследствии величина \vec{S} получила название *вектора Умова*. Как следует из (1.24), амплитуда вектора Умова изменяется со временем и в пространстве, поэтому целесообразно определить среднее по времени значение вектора Умова (*векторную интенсивность волны*):

$$\langle \vec{S}(t) \rangle = \langle w(t) \rangle \cdot \vec{v} = \frac{\rho \cdot A^2 \omega^2}{2} \cdot \vec{v}. \quad (1.25)$$

Поток энергии упругой волны через любую поверхность “ Σ ” можно определить интегрированием скалярного произведения вектора Умова на вектор элемента поверхности $d\vec{s}$ (вектор $d\vec{s}$ направлен по нормали к элементу поверхности с площадью ds):

$$\Phi = \int_{\Sigma} \vec{S}(t) \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} S_n(t) ds. \quad (1.26)$$

Здесь S_n – нормальная к элементу поверхности составляющая вектора \vec{S} (не путать с площадью!). Наконец, среднее по времени значение потока энергии упругой волны через поверхность можно вычислить так:

$$\langle \Phi(t) \rangle = \int_{\Sigma} \langle \vec{S}(t) \rangle \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \langle S_n(t) \rangle ds. \quad (1.27)$$

*) $\vec{S}(t) \cdot d\vec{s}$ – именно так в дальнейшем мы будем обозначать скалярное произведение векторов, чтобы не перегружать записи скобками.

* Дополнение к § 1

1.5. Среда с распределёнными параметрами

В заключение этого параграфа покажем, что полученное нами выражение для фазовой скорости упругой волны в одномерной цепочке атомов (рис. 1.1) легко обобщается на систему с распределёнными параметрами – например, на длинный однородный стержень, изготовленный из материала, плотность которого ρ .

Рассмотрим отрезок стержня длиной l (см. рис. 1.5), масса которого $m = \rho \cdot lS$, где S – площадь поперечного сечения стержня. Поскольку выбранный нами отрезок в целом покоится, приложенные к нему слева и справа силы \vec{F} равны по модулю (для определённости будем считать эти силы растягивающими). При этом отрезок удлиняется на Δl . В рассматриваемом случае коэффициент упругости k – это коэффициент пропорциональности между модулем силы F и удлинением стержня:

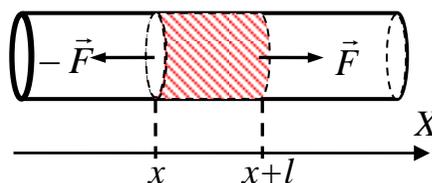


Рис. 1.5. Часть однородного стержня.

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{FS}{S\Delta l} = \frac{\sigma S}{\Delta l}. \quad (1.14)$$

В соотношении (1.14) используется величина механического напряжения $\sigma = F/S$. Подставим полученные для m и k результаты в выражение для квадрата скорости волны (1.5):

$$v^2 = \frac{k \cdot l^2}{m} = \frac{\sigma \cdot l}{\rho \Delta l}. \quad (1.15)$$

Учитывая, что величина $G = \frac{\sigma \cdot l}{\Delta l}$ – не что иное как модуль Юнга материала стержня (модуль продольной упругости), получаем для скорости распространения упругой волны следующий полезный результат:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (1.16)$$

При выводе (1.16) мы предполагали, что при распространении волны

силы действуют вдоль стержня (по направлению распространения волны). Соответственно, частицы стержня также совершают колебательные движения вдоль оси X (т.е. рассматривались продольные волны). В твёрдом теле возможно также распространение поперечных волн. Нетрудно показать, что в этом случае модуль Юнга в равенстве (1.16) нужно заменить на модуль сдвига.

§ 2. Электромагнитные волны

В разделе «Электромагнетизм», мы обсуждали, прежде всего, электрические и магнитные поля, которые создают неподвижные заряженные тела (электростатика) и постоянные электрические токи (магнитостатика). Динамическую ситуацию произвольно движущихся зарядов и переменных токов мы затронули только в связи с явлением электромагнитной индукции (ЭМИ). Лишь в конце мы обсудили «теоретические прорывы» и обобщения под названием «Элементы теории электромагнетизма Максвелла». Вот от этого и будем сейчас отталкиваться.

Для динамической ситуации, когда напряжённость \vec{E} и индукция \vec{B} зависят от времени Максвеллу пришлось «подправлять» уравнения электро- и магнитостатики, а не просто заменять в них постоянные значения \vec{E} и \vec{B} на мгновенные $\vec{E}(t)$ и $\vec{B}(t)$.

2.1. Два уравнения Максвелла

2.1.1. По Фарадею сила тока электромагнитной индукции пропорциональна скорости изменения

магнитного потока через поверхность, ограничивающую проводящий контур. По Максвеллу, этот ток обусловлен электродвижущей силой – удельной работой сторонних сил. Каких именно? Для неподвижного проводника пришлось вводить представления о возникновении особого “вихревого” электрического поля \vec{E}^* :

$$\mathcal{E}_i = \oint_{\text{"C"}} \vec{E}^* \cdot d\vec{l}.$$

Его источником, по Максвеллу, является переменное магнитное поле $\vec{B}(t)$. В правой части записи закона ЭМИ вместо $\frac{d\Phi}{dt}$ появляется:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

В этой трактовке электромагнитной индукции и записано одно из уравнений Максвелла:

$$\oint_C \vec{E}^* \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}.^*) \quad (\text{I})$$

Таким образом, по сути, утверждается, что переменное магнитное поле порождает электрическое.

2.1.2. Вторая гипотеза Максвелла

Не воспроизводя весь ход рассуждений, вспомним только, что в теории Максвелла также и наоборот, переменное электрическое поле порождает магнитное.

*) Здесь мы используем нумерацию уравнений в контексте данного обсуждения.

Это формализовано в понятии «ток смещения», его сила равна

$$I_{см} = \varepsilon\varepsilon_0 \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Ещё одно уравнение Максвелла, включающее эту величину, имеет вид:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 \cdot \left(\int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \varepsilon\varepsilon_0 \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right). \quad (\text{II})$$

Два указанных положения теории Максвелла – это гипотезы, а отнюдь не самоочевидные утверждения. Они должны быть подтверждены экспериментальной проверкой вытекающих из них новых следствий.

Вслед за Максвеллом, получим из его уравнений, как следствие, волновое уравнение для величин $\vec{E}(t)$ и $\vec{B}(t)$. И это будет теоретическим обоснованием гипотезы о существовании в природе электромагнитных волн. Этот вывод был затем подтверждён знаменитыми опытами Герца, о которых мы расскажем в своё время.*)

2.2. Вывод волнового уравнения

Итак, что бы мы хотели получить?

Во-первых, отталкиваясь от 2-х приведённых

*) Результаты обобщены в статье Г. Герца «О лучах электрической силы», вышедшей в 1888 году. Этот год считается годом открытия электромагнитных волн и экспериментального подтверждения теории Максвелла.

уравнений Максвелла в т.н. интегральной форме, получить дифференциальную взаимосвязь полей $\vec{E}(t)$ и $\vec{B}(t)$ – т.е. локальную, в каждой данной точке пространства.

Во-вторых, показать, что эти меняющиеся во времени сцепленные поля могут передаваться от точки к точке пространства, то есть подчиняются знакомому нам уже «волновому уравнению», а значит обосновать предсказание существования электромагнитных волн!

Ограничимся при этом простейшим случаем (моделью):

1) Среда однородная и непроводящая. Следовательно, в ней не может быть токов проводимости $\left(\int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \right)$;

2) \vec{E} и \vec{B} зависят только от одной пространственной координаты, например, x – т.е. $\vec{E}(x,t)$ и $\vec{B}(x,t)$.*)

Для реализации нашей задачи выберем два прямоугольных контура “ C_1 ” и “ C_2 ” (см. рис. 2.1) очень малых размеров (мы ведь рассчитываем получить локальную взаимосвязь полей) со сторонами dx и dy в плоскости YOX для “ C_1 ”, а также аналогично dx и dz в

*) Это означает, что электромагнитная волна (если, конечно, удаётся доказать её существование) – плоская.

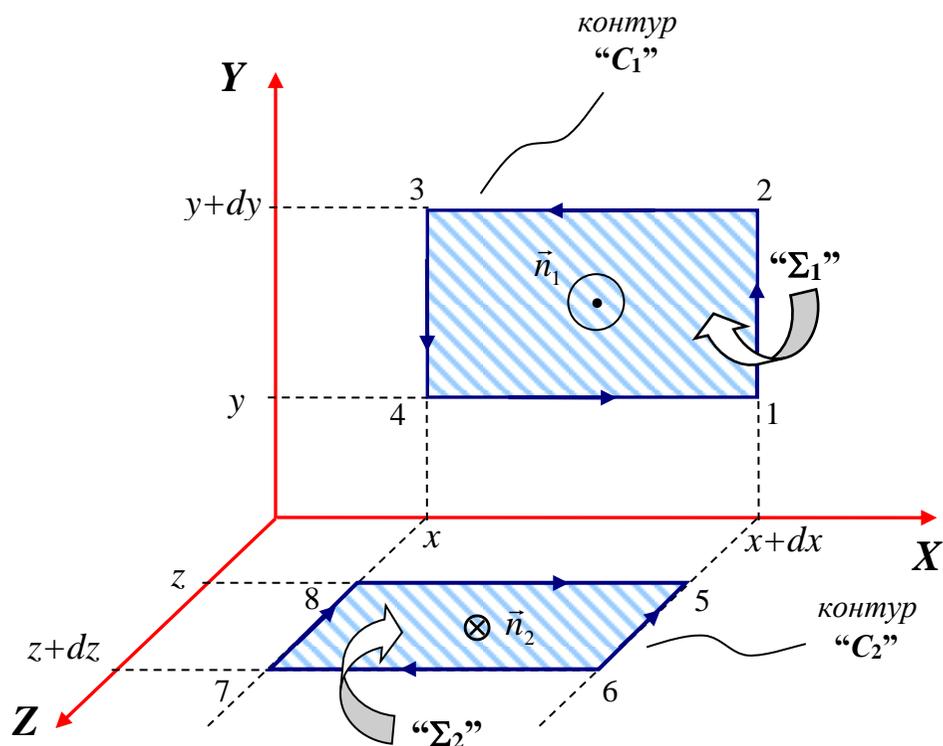


Рис. 2.1. К выводу уравнения электромагнитной волны.

плоскости ZOX для " C_2 ". Будем осуществлять обход 1-2-3-4 и 5-6-7-8.

Левые интегралы в (I) и (II) берутся по замкнутому контурам $C_{1,2}$ ($d\vec{l}$ – элемент такого контура), правые – по поверхностям $\Sigma_{1,2}$, ограниченным соответствующими контурами. Необходимо помнить, что направление обхода по контуру и направление нормали к поверхности связаны между собой правилом буравчика.

Далее.

1) На участке 1-2 перемещение происходит вдоль

оси OY , поэтому $\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_y(x+dx) \cdot dy$; на участке 3-4

перемещение происходит против оси Y , поэтому $\int_3^4 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_y(x) \cdot dy$; участки 2-3 и 4-1 абсолютно

одинаковы, но проходятся в разные стороны, следовательно $\int_2^3 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_4^1 \vec{E} \cdot d\vec{l}$. В итоге получим для интеграла в левой части (I):

$$\oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = [E_y(x+dx) - E_y(x)] \cdot dy = \frac{\partial E_y}{\partial x} \cdot dx dy. \quad (2.1)$$

Здесь мы учли, что $\vec{E}(x+dx, t) \cong \vec{E}(x, t)$. Но они, всё же, разные!

Правая часть равенства (I) вычисляется совсем просто, если иметь в виду, что поверхность Σ_1 мала, и вектор \vec{B} в разных местах этой поверхности практически одинаков, а нормаль к этой поверхности направлена вдоль оси Z :

$$\int_{\Sigma_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_z \cdot dx dy. \quad (2.2)$$

Подставив полученные результаты (2.1) и (2.2) в уравнение (I), получаем:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (2.3)$$

2) Прежде всего, отметим, что уравнение (II) в

рамках нашей модели упрощается и может быть записано в виде:

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 \cdot \varepsilon\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (\text{II}^*)$$

Выберем прямоугольный контур “ C_2 ” в плоскости ZOX и осуществим обход 5-6-7-8. Левая часть уравнения (II*) вычисляется аналогично левой части (I):

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = [B_z(x+dx) - B_z(x)]dz = \frac{\partial B_z}{\partial x} dx dz. \quad (2.4)$$

При вычислении поверхностного интеграла в правой части уравнения (II*) учтём, что направление нормали к поверхности Σ_2 противоположно оси OY , и тогда получим:

$$\int_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -E_y \cdot dx dz. \quad (2.5)$$

Подстановка (2.4) и (2.5) в (II*) приводит к равенству

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \cdot \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (2.6)$$

Дифференцируя (2.3) и (2.6) по координате x и, изменяя порядок дифференцирования по x и по t в правых частях, получаем

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} \right), \quad (2.7)$$

*) В правой части удобнее поменять местами операции интегрирования и дифференцирования – для неподвижного контура такая операция допустима.

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right). \quad (2.8)$$

Наконец, для правой части (2.7) используем замену (2.6), а в правой части (2.8) – замену (2.3). В итоге приходим к двум дифференциальным волновым уравнениям:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} \cdot \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}. \quad (2.10)$$

Их решением как раз и может быть электромагнитная волна, бегущая в положительном направлении оси OX . Поскольку множитель $1/\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0$ имеет размерность квадрата скорости, можно переписать уравнения в виде:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}, \quad (2.9,a)$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}. \quad (2.10,a)$$

2.3. Важные выводы

1. Как мы видим, эти уравнения с математической точки зрения абсолютно одинаковы – изменения электрического и магнитного полей в электромагнитной волне строго взаимосвязаны.

2. Фазовая скорость электромагнитной волны

оказалась равной $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$. Уравнения (2.9,*a*) и

(2.10,*a*) говорят нам, что в отличие от упругих волн, электромагнитная волна может распространяться и в

вакууме с фазовой скоростью $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Этот результат позволил Максвеллу сделать ещё одно фундаментальное предположение – *свет представляет собой электромагнитную волну* (к тому времени скорость света была уже измерена экспериментально с достаточно большой точностью, хотя природа света окончательно не была установлена). Для световой волны параметр $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ называется показателем преломления; скорость света в среде с показателем преломления n равна $v = c/n$.

3. Какие функции удовлетворяют уравнениям вида (2.9) и (2.10)? Мы знаем, что такими функциями могут быть, например, функции гармонические:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx), \quad \vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - kx). \quad (2.11)$$

Вид этих функций не позволяет говорить, о каких волнах, продольных или поперечных, идёт речь.

Однако из одного лишь предположения, что векторы \vec{E} и \vec{B} зависят только от координаты x (волна плоская), мы выяснили, что значение имеют лишь компоненты напряжённости электрического поля \vec{E}_y и

индукции магнитного поля \vec{B}_z , т.е. перпендикулярные оси X – направлению распространения. Таким образом, из уравнений (2.9) и (2.10) следует ещё один принципиальный вывод – электромагнитная волна является поперечной. Векторы \vec{E} , \vec{B} и \vec{v} всегда образуют правую тройку взаимноперпендикулярных векторов. Поэтому в дальнейшем мы не будем использовать индексы “y”, “z” при обозначении напряжённости электрического поля E и индукции магнитного поля B .

2.4. Фазовые и амплитудные соотношения для электромагнитной волны

Анализ полученных нами уравнений позволяет получить дополнительные сведения о взаимосвязи между амплитудами и фазами колебаний векторов \vec{E} и \vec{B} . Пусть напряжённость электрического поля в плоской волне изменяется по закону:

$$E(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx).$$

Предполагая возможность сдвига по фазе между колебаниями векторов \vec{E} и \vec{B} , запишем:

$$B(x,t) = B_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

Далее подставляя в уравнения (2.3) и (2.7), получаем:

$$kE_0 \cdot \sin(\omega t - kx) = \omega B_0 \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi), \quad (2.12)$$

$$kB_0 \sin(\omega t - kx + \varphi) = \omega E_0 \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \sin(\omega t - kx). \quad (2.13)$$

Равенства (2.12) и (2.13) могут выполняться,

только если равны амплитуды и фазы гармонических функций в левых и правых частях этих равенств. Отсюда получаем, что фазы колебаний векторов \vec{E} и \vec{B} одинаковы ($\varphi = 0$). Кроме того, приравнивая коэффициенты перед функциями, получим также связь амплитудных значений:

$$\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{B_0^2}{\mu\mu_0}. \quad (2.14)$$

Поскольку фазы колебаний векторов \vec{E} и \vec{B} совпадают, соотношение (2.14) выполняется также для величин напряжённости электрического поля и индукции магнитного поля в произвольные моменты времени (а не только для амплитудных значений):

$$\varepsilon\varepsilon_0 E^2(t) = \frac{B^2(t)}{\mu\mu_0}, \quad B(t) = \frac{E(t)}{v}. \quad (2.15)$$

На рис. 2.2 показана “мгновенная фотография” плоской электромагнитной волны, распространяю-

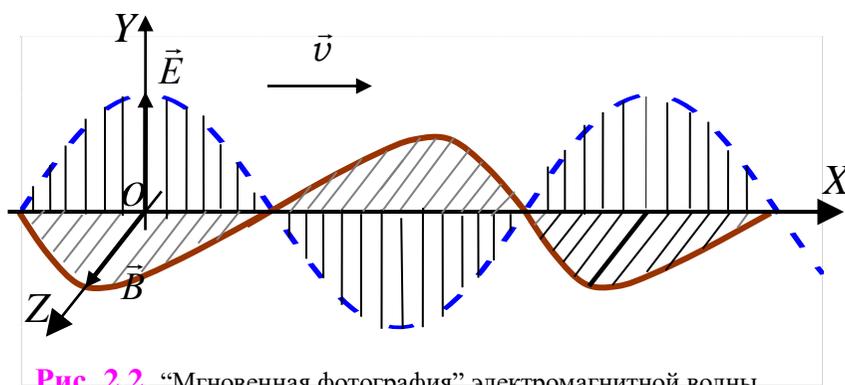


Рис. 2.2. “Мгновенная фотография” электромагнитной волны

щейся по оси X . С течением времени волна смещается (“летит”) по оси X со скоростью $v = c/n$.

Обратим ещё раз внимание, что тройка векторов \vec{E} , \vec{B} и \vec{v} ориентирована совершенно определенным образом – направление скорости волны \vec{v} всегда совпадает с направлением векторного произведения $[\vec{E}, \vec{B}]$. Положения максимумов напряжённости электрического поля в электромагнитной волне совпадают с положением максимумов индукции магнитного поля.

2.5. Характеристики переноса энергии электромагнитной волной

Энергия электромагнитной волны складывается из энергии электрического и магнитного полей. В курсе электромагнетизма мы получили выражения для плотности энергии этих полей w_E и w_B соответственно:

$$w_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}, \quad (2.16)$$

$$w_B = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (2.17)$$

Сравнивая (2.16) и (2.17) с (2.15), приходим к выводу, что в электромагнитной волне энергия распределяется поровну между электрическим и магнитным полем. Точно так же, как в упругой волне энергия распределяется поровну между кинетической

и потенциальной – см. (1.18) и (1.19).

Из соотношений (2.16) и (2.17) следует, что плотность энергии (энергия, приходящаяся на единицу объёма среды, в которой распространяется электромагнитная волна), равна:

$$w = w_E + w_B = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu\mu_0} = \frac{EB}{\mu\mu_0 v}. \quad (2.18)$$

Для характеристики переноса энергии электромагнитной волной (как и в случае волны упругой) вводится целый ряд величин, удобных для применения в том, или ином случае: плотность потока энергии (S), интенсивность (I), Определения этих величин такие же, как для упругой волны (см. стр. 123–124):

$$S(t) = w(t) \cdot v = \frac{EB}{\mu\mu_0}, \quad (2.19)$$

$$I = \langle S(t) \rangle = \langle w(t) \rangle \cdot v = \frac{E_0 B_0}{2\mu\mu_0}, \quad (2.20)$$

$$\vec{S}(t) = w(t) \cdot \vec{v} = \frac{[\vec{E}, \vec{B}]}{\mu\mu_0}, \quad (2.21)$$

$$\langle \vec{S}(t) \rangle = \langle w(t) \rangle \cdot \vec{v} = \frac{[\vec{E}_0, \vec{B}_0]}{2\mu\mu_0}, \quad (2.22)$$

$$\Phi = \int_{\Sigma} \vec{S} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} S_n ds. \quad (2.23)$$

Аналогом вектора Умова для волны электромагнитной является вектор Пойнтинга^{*)} (\vec{S})

^{*)} Эта характеристика была предложена английским физиком Дж.Г. Пойнтингом в 1885 г.